Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Ch. Bender
S. Pokalyuk 23. Oktober 2009

Stochastik

2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Satz 1.10) *Es sei $\mathcal{K}$ ein Körper und $\mu : \mathcal{K} \to [0, \infty]$ ein endlicher Inhalt. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:*

(i) μ *ist ein Prämaß.*

(ii) μ *ist aufsteigend stetig.*

(iii) μ *ist absteigend stetig.*

(iv) μ *ist absteigend stetig in* $\emptyset$.

4 Punkte

Aufgabe 2 (Lemma 1.17, (ii)) *Es sei* $\mathcal{M} \subset 2^\Omega$ *mit* $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$. *Zeigen Sie, dass* $\mathfrak{D}(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M})$ *(wobei* $\mathfrak{D}(\mathcal{M})$ *das von* $\mathcal{M}$ *erzeugte Dynkinsystem).*

3 Punkte

Aufgabe 3 (Lemma 2.1) *Zeigen Sie, dass jedes der folgenden Mengensysteme die Borelsche* σ*-Algebra erzeugt:*
$\mathcal{M}_1 = \{(a, b);\ -\infty < a \le b < +\infty\}$,
$\mathcal{M}_2 = \{[a, b];\ -\infty < a \le b < +\infty\}$,
$\mathcal{M}_3 = \{(-\infty, a];\ a \in \mathbb{R}\}$,
$\mathcal{M}_4 = \{(-\infty, a);\ a \in \mathbb{R}\}$,
$\mathcal{M}_5 = \{K;\ K \subset \mathbb{R} \textit{ offen}\}$,
$\mathcal{M}_6 = \{A;\ A \subset \mathbb{R} \textit{ kompakt}\}$.

6 Punkte

Aufgabe 4 *Sei* $\mathcal{A}$ *eine* σ*-Algebra und* $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Zeigen Sie, dass beide "Abstände"*

$$\rho_1(A, B) := P(A \triangle B),$$

$$\rho_2(A, B) := \begin{cases} \dfrac{P(A \triangle B)}{P(A \cup B)}, & P(A \cup B) \neq 0 \\ 0, & P(A \cup B) = 0 \end{cases}$$

die Dreiecksungleichung erfüllen, d.h. $\rho_1(A, C) \le \rho_1(A, B) + \rho_1(B, C)$ *(für* ρ_2 *analog), wobei alle* $A, B, C \in \mathcal{A}$ *und* $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

3 Punkte

Abgabe bis Freitag, den 30.10.09 um 12.00 Uhr in den Räumen 206, 207.