Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Ch. Bender
S. Pokalyuk

30. Oktober 2009

Stochastik

3. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Bemerkung zu dem Satz 1.21) *Sei* $\tilde{\mathcal{A}} := \{A \subset \Omega; \exists B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ *s.d.* $B_1 \subset A \subset B_2$ *und* $\mu(B_2 \setminus B_1) = 0\}$ *und definiere* $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{A}} \to [0,\infty]$ *durch* $\tilde{\mu}(A) = \mu(B_2) = \mu(B_1)$ *für* $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ *mit* $B_1 \subset A \subset B_2$ *und* $\mu(B_2 \setminus B_1) = 0$. *Zeigen Sie, dass* $\tilde{\mathcal{A}}$ *eine* σ*-Algebra ist und* $\tilde{\mu}$ *ein wohldefiniertes Maß auf* $\tilde{\mathcal{A}}$ *ist.*

5 Punkte

Aufgabe 2 (Satz 2.3, (i)) *Sei* $P : \mathcal{B} \to [0,1]$ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß, wobei* $\mathcal{B}$ *die Borelsche* σ*-Algebra auf* $\mathbb{R}$ *ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung* $x \mapsto P((-\infty, x])$ *eine Verteilungsfunktion ist.*

5 Punkte

Aufgabe 3 *Es sei* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ *gegeben durch* $F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ *mit*

a) $f(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}, \ \lambda > 0,$

b) $f(y) = 1_{[0,\infty)}(y) \frac{y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}$, *wobei* $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$, $\alpha, \beta > 0$.

Zeigen Sie, dass F *in beiden Fällen eine Verteilungsfunktion ist.*

3 Punkte

Aufgabe 4 *Zeigen Sie: Die Dichte der* t*-Verteilung*

$$f_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \ n \in \mathbb{N},$$

konvergiert punktweise gegen die Dichte einer Standardnormalverteilung für $n \to \infty$.
Hinweis: Verwenden Sie die Stirlingsche Formel (ohne Beweis) $\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}$ $(x \to +\infty)$.

3 Punkte

Abgabe Freitag, den 06.11.09 in der Übung.