Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Ch. Bender
S. Pokalyuk 06. November 2009

Stochastik

4. Übungsblatt

Aufgabe 1 *Es seien* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ *unabhängige Zufallsvariablen.*

a) *Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:*
$X + Y$ *ist konstant* P*-fast sicher* $\Leftrightarrow$ X *und* Y *sind konstant* P*-fast sicher.*

b) *Es seien* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}/\mathcal{B}$*-messbar, wobei* $\mathcal{B}$ *die Borelsche* σ*-Algebra auf* $\mathbb{R}$ *ist. Zeigen Sie, dass* $f(X), g(Y)$ *unabhängig sind.*

5 Punkte

Aufgabe 2

a) *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $(\Omega', \mathcal{A}')$ *ein Messraum und* $X : \Omega \to \Omega'$ *eine Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass* P_X *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(\Omega', \mathcal{A}')$ *ist.*

b) *Es sei* $\mathcal{A}$ *eine* σ*-Algebra auf* Ω *und* $B \subset \Omega$*. Zeigen Sie, dass* $\mathcal{A}_B := \{A \cap B; A \in \mathcal{A}\}$ *eine* σ*-Algebra auf* B *ist. Man nennt* $\mathcal{A}_B$ *die Spur von* $\mathcal{A}$ *in* B.

c) *Sei* $\Omega = \mathbb{R}$ *und darauf das Mengensystem* $\mathcal{A} := \{A \subset \Omega; A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ *und die Abbildung*

$$P : \mathcal{A} \to \{0, 1\}, \; A \mapsto \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar} \\ 1, & A^c \text{ abzählbar} \end{cases}$$

gegeben.

Zeigen Sie: $\mathcal{A}$ *ist eine* σ*-Algebra und* P *ein Wahrscheinlichkeitsmaß.*

7 Punkte

Aufgabe 3 *Zeigen Sie: Die Funktion*

$$G(x, y) = \begin{cases} 1, & x + y \geq 0 \\ 0, & x + y < 0 \end{cases}$$

ist rechtsstetig und in jeder Koordinate monoton steigend, aber keine Verteilungsfunktion in $\mathbb{R}^2$.

4 Punkte

Abgabe Freitag, den 13.11.09 in der Übung.