Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Ch. Bender
S. Pokalyuk 13. November 2009

Stochastik

5. Übungsblatt

Aufgabe 1 *Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{E}^*$ die Menge aller nicht-negativen reellwertigen Zufallsvariablen. Zeigen Sie:*

a) ***(Lemma 3.2.3)*** *Sei $X, Y \in \mathcal{E}^*$. Dann gilt:*

(i) $\int (\alpha X) d\mu = \alpha \int X d\mu, \ \alpha \geq 0.$

(ii) $\int (X+Y) d\mu = \int X d\mu + \int Y d\mu.$

(iii) $X \leq Y \Rightarrow \int X d\mu \leq \int Y d\mu.$

b) Für jede Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}^*$ gilt:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathcal{E}^*.$

(ii) $\int \Big(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\Big) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int X_n d\mu.$

6 Punkte

Aufgabe 2 (Satz 3.3.3, (iii), (iv)) *Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und X, Y μ-integrierbare Zufallsvariablen. Folgern Sie daraus, dass*

a) $max(X, Y)$ und $min(X, Y)$ μ-integrierbar sind.

b) $\Big|\int X d\mu\Big| \leq \int |X| d\mu.$

4 Punkte

Aufgabe 3 *Es sei λ das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen λ-integrierbar sind. Geben Sie bei den λ-integrierbaren Funktionen die Werte der Integrale an.*

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = x.$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) = x \mathbf{1}_{[0,1]}(x).$

c) $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}, \ \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}, \ \mathbf{1}_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}.$

6 Punkte

Abgabe Freitag, den 20.11.09 in der Übung.