Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Ch. Bender
S. Pokalyuk

20. November 2009

Stochastik

6. Übungsblatt

Aufgabe 1 *Es seien* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein W-Raum und* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *eine Zufallsvariable.*

a) *Sei* X *standardnormalverteilt (d.h.* $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$*). Zeigen Sie:*

$$E[X^r] = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1), & falls\ r = 2k, \\ 0, & falls\ r = 2k-1, \end{cases} \quad für\ k \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Funktionalgleichung der Γ*-Funktion sowie die Identität* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

b) *Sei* X *lognormalverteilt mit Parametern* (μ,σ^2), *d.h.* $X = e^Y$, *wobei* Y $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*-verteilt ist. Zeigen Sie:* $E[X^r] = e^{r\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2}$.

4 Punkte

Aufgabe 2 *Es seien* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein W-Raum und* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *eine Zufallsvariable.*

a) *Sei* $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *die Verteilungfuntion von* X*. Zeigen Sie:*

(i) $E[X]$ *existiert* $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty}(1 - F(y))dy$ *und* $\int_{-\infty}^0 F(y)dy$ *existieren.*

(ii) *Falls* $E[X]$ *existiert, gilt*

$$E[X] = \int_0^{+\infty}(1 - F(y))dy - \int_{-\infty}^0 F(y)dy.$$

b) *Sei* $X_{a,b} := X\mathbf{1}_{\{\omega;\ a<X(\omega)\leq b\}}$*. Beweisen Sie:*

$$E[X] \text{ existiert } \Rightarrow \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} E[X_{a,b}] = E[X].$$

6 Punkte

Aufgabe 3 *Sei* $T : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetig differenzierbare Funktion mit* $T'(t) \geq 0$ *und* $f : [T(a), T(b)] \to \mathbb{R}$ *eine lebesgueintegrierbare Funktion. Ferner sei* $\mu(A) := \int_a^b T'(t)\mathbf{1}_A(t)dt$ *auf* $([a, b], \mathcal{B}_{[a,b]})$ *definiert, wobei* $\mathcal{B}_{[a,b]}$ *die Spur-Borel-*σ*-Algebra auf* $[a, b]$ *ist, und* $\lambda_{[T(a),T(b)]}$ *das Lebesguemaß auf* $([T(a), T(b)], \mathcal{B}_{[T(a),T(b)]})$*. Zeigen Sie:*

a) $\mu_T(A) := \mu(T^{-1}(A)) = \lambda_{[T(a),T(b)]}(A) := \lambda(A \cap [T(a), T(b)])$.

b) *Die Funktion* $(f \circ T)(u)T'(u)$ *ist lebesgueintegrierbar auf* $[a, b]$ *und*

$$\int_{T(a)}^{T(b)} f(u)du = \int_a^b (f \circ T)(u)T'(u)du.$$

Hinweis: Berechnen Sie zuerst $\mu_T((T(c), T(d)])$ *für* $c \leq d$, $c, d \in [a, b]$.

6 Punkte

Abgabe Freitag, den 27.11.09 in der Übung.