Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Ch. Bender
S. Pokalyuk

11. Dezember 2009

Stochastik

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) *Es sei* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $\mathcal{K} \subset 2^{\Omega}$ *ein Körper mit* $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{A}$. *Zeigen Sie mit dem Prinzip von geeigneten Mengen, dass für jedes* $\varepsilon > 0$ *und* $B \in \mathcal{A}$ *eine Menge* $A \in \mathcal{K}$ *mit*

$$P(A \Delta B) \leq \varepsilon$$

existiert.

b) **(Lemma 4.1.4)** *Sei* P *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. *Zeigen Sie mit a), dass für jedes* $\varepsilon > 0$ *und jedes* $B \in \mathcal{B}^n$ *eine kompakte Menge* $A \in \mathcal{B}^n$ *mit* $A \subset B$ *und*

$$P(B \setminus A) \leq \varepsilon$$

existiert.

6 Punkte

Aufgabe 2 *Sei* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, *die die Konsistenzbedingung erfüllt. Ferner seien* $\tilde{P}(T_n(B_n)) := P_n(B_n)$, *wobei*

$$T_n(B_n) := \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; (x_1, \dots, x_n) \in B_n\},\ n \in \mathbb{N},\ B_n \in \mathcal{B}^n,$$

und

$$\mathcal{K}^{\mathbb{N}} := \{T_n(B_n); n \in \mathbb{N},\ B_n \in \mathcal{B}^n\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}^{\mathbb{N}}$ *ein Körper ist und* $\tilde{P} : \mathcal{K}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ *ein Wahrscheinlichkeitsinhalt ist.*

5 Punkte

Aufgabe 3 *Es seien* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $X_1, \dots, X_n$ *unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen und* $Y := \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. *Man sagt dann, dass* Y *die Chi-Quadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden hat. Zeigen Sie, dass die Dichte von* Y *gegeben ist durch*

$$f_Y(x) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) 2^{-\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})},\ n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

5 Punkte

Abgabe Freitag, den 18.12.09 in der Übung.