

Mathematik für Informatiker III

8. Übung

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die definiert ist durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} (x_1^2 + x_2^2) \cos\left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right) & , (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(0, 0)$ total differenzierbar ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(0, 0)$ *nicht* stetig partiell differenzierbar ist.

Hinweis für (i): Beachten Sie Bemerkung 1.6.2 sowie den zweiten Teil von Satz 1.6.3.

Aufgabe 32 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die definiert ist durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^4} & , (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(0, 0)$ stetig ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass f an der Stelle $(0, 0)$ *nicht* total differenzierbar ist.

Hinweis für (ii): Beachten Sie Bemerkung 1.6.2 sowie den zweiten Teil von Satz 1.6.3.

Aufgabe 33 (4 Punkte)

Es seien $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die definiert sind durch

$$f_1(x) := (1, x, x^2)^\top, \quad f_2(y_1, y_2, y_3) := (\sin(y_1) - \cos(y_2), e^{y_3})^\top \quad \text{und} \quad f_3(z_1, z_2) := z_1 z_2.$$

Bearbeiten Sie die folgenden beiden Teilaufgaben unter expliziter Benutzung der mehrdimensionalen Kettenregel (vgl. Satz 1.6.10).

- (i) Begründen Sie, warum die Abbildung $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ überall total differenzierbar ist.
- (ii) Bestimmen Sie die totale Ableitung von $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ an beliebiger Stelle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 34 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die definiert ist durch

$$f(x_1, x_2) := \log(1 + x_2^2) + x_2 \cos(x_1).$$

Bestimmen Sie die Taylor-Approximation zweiten Grades von f ohne Restglied an der Stelle $x^0 = (x_1^0, x_2^0) := (\pi, 0)$.