Prof. Dr. Henryk Zähle
M.Sc. Patrick Kern

Mathematik für Informatiker III

Wiederholung

Aufgabe 1

Aus dem Wort „COMPUTER“ werden rein zufällig nacheinander vier Buchstaben ohne Zurücklegen entnommen, die gemäß der Reihenfolge, in der sie gezogen wurden, zu einem neuen Wort zusammengesetzt werden. Es werde das Ereignis betrachtet, dass das auf diese Weise gebildete Wort nur aus den Buchstaben „C“, „O“, „M“, „P“ besteht.

(i) Geben Sie einen geeigneten W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ an, der dieses Zufallsexperiment modelliert.

(ii) Beschreiben Sie das obige Ereignis mengentheoretisch und bestimmen Sie dessen Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Abbildungen jeweils um eine Zähldichte handelt.

(i) $g_p : \mathbb{N} \to [0, 1]$, $k \mapsto g_p(k) := (1-p)^{k-1}p$ für ein festes $p \in (0, 1]$, wobei $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$.

(ii) $\pi_\lambda : \mathbb{N}_0 \to [0, 1]$, $k \mapsto \pi_\lambda(k) := \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ für ein festes $\lambda \in (0, \infty)$, wobei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Bemerkung: Gemäß Bemerkung 2.2.3 induziert die Abbildung g_p aus (i) (bzw. π_λ aus (ii)) das W-Maß G_p (geometrische Verteilung) auf $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ (bzw. Π_λ (Poisson-Verteilung) auf $(\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0))$).

Aufgabe 3

Herr Falke hat seine Brille verlegt. Mit der Wahrscheinlichkeit 0.7 befindet sie sich in seiner Wohnung und mit der Wahrscheinlichkeit 0.3 befindet sie sich im Auto. Ist sie in der Wohnung, dann gibt es zwei gleichwahrscheinliche Möglichkeiten: Sie liegt auf dem Schreibtisch oder im Badezimmer. Herr Falke sucht nur in der Wohnung und nicht im Auto (liegt die Brille im Auto, dann kann er sie also nicht finden). Da er ohne Brille schlecht sieht, findet er sie mit Wahrscheinlichkeit 0.8, wenn sie auf dem Schreibtisch liegt, bzw. mit Wahrscheinlichkeit 0.6, wenn sie sich im Badezimmer befindet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(i) sich die Brille im Badezimmer befindet.

(ii) Herr Falke die Brille findet.

(iii) sich die Brille auf dem Schreibtisch befindet, wenn Herr Falke vergeblich gesucht hat.

Aufgabe 4

Ein roter und ein grüner jeweils fairer Würfel werden nacheinander einmal geworfen. Es bezeichne X die Augenzahl des roten Würfels und Y die Differenz zwischen Augensumme und Minimum beider Würfe.

(i) Wählen Sie einen geeigneten W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, der dieses Zufallsexperiment modelliert und definieren Sie X und Y als Abbildungen von Ω nach $\mathbb{N}$.

(ii) Bestimmen Sie die Verteilungen der Zufallsvariablen X und Y.

(iii) Untersuchen Sie X und Y auf Unabhängigkeit.

bitte wenden

Aufgabe 5

In einer Urne mit 20 Kugeln befinden sich genau 12 rote Kugeln. Man zieht nun nacheinander fünf Kugeln aus der Urne mit Zurücklegen. Es bezeichne X die Zufallsvariable, die die Anzahl der gezogenen roten Kugeln beschreibt.

(i) Geben Sie einen geeigneten W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ an, der dieses Zufallsexperiment modelliert.

(ii) Definieren Sie X als Abbildung von Ω nach $\mathbb{N}_0$ und geben Sie die Verteilung von X an.

(iii) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe 6

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ reelle Zufallsvariablen auf einem diskreten W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ derart, dass $X_1^2, X_2^2, \ldots$ $\mathbb{P}$-integrierbar, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, X_j) = 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$, $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \cdots$ und $\sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_i] < \infty$. Weiter sei $\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$n^\alpha (\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow{p} 0 \quad \text{für jedes } \alpha < 1/2.$$