Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Saarbrücken, 14.12.2018

Lösungshinweise: Präsenzübung 4 zur Vorlesung
Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Aufgabe 1.

i) Die elementaren Zeilenumformungen

(a) $[III \rightsquigarrow III + I]$,

(b) $[II \rightsquigarrow 2I - II]$

ergeben im Gaußschen Algorithmus

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2+a & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2+a & 5 & 0 \end{array}\right) .$$

Für $a \neq 2$ folgt aus $(2+a)x_2 = 4x_2$ unmittelbar $x_2 = 0$ und damit $x_1 = x_3 = 0$, es existiert nur die triviale Lösung $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$ des (homogenen) Gleichungssystems.

Für $a = 2$ erhält man

$$x_2 = -\frac{5}{4}x_3 , \quad x_1 = -3x_3 - 2\left[-\frac{5}{4}x_3\right] = -\frac{1}{2}x_3$$

oder anders geschrieben ist die (allgemeine) Lösung des (homogenen) Gleichungssystems wie auch eine Probe bestätigt von der Form

$$\underline{\mathbf{x}}_t = t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Bitte wenden.

ii) Beim (inhomogenen) Gleichungssystem liefert der Gaußsche Algorithmus mit den gleichen Umformungen wie oben

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 2+a & 5 & -1 \end{array}\right) .$$

Im Fall $a \neq 2$ folgt sofort $x_2 = 0$ und daraus $x_3 = -1/5$. Zusammen mit der ersten Gleichung ergibt sich die eindeutige Lösung

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} .$$

Bemerkung. Für $a \neq 2$ taucht der Parameter a tatsächlich nicht mehr in der Lösung auf.

Ist schließlich $a = 2$, so gilt mit der Notation $x_3 = t$

$$x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4}t , \qquad x_1 = -3t + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t ,$$

mit anderen Worten ist die (allgemeine) Lösung

$$\underline{\mathbf{x}}_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad t \in \mathbb{R} .$$

Aufgabe 2.

i) Mit

(a) $[II \rightsquigarrow 3I - II]$, $[III \rightsquigarrow I - III]$,
(b) $[III \rightsquigarrow II - 2III]$,
(c) $[II \rightsquigarrow \frac{1}{4}II]$, $[III \rightsquigarrow \frac{1}{4}III]$,

ergibt sich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} \end{array}\right) .$$

Man erkennt $x_3 = 5/4$ und Rückwärtseinsetzen liefert $x_2 = -7/4$, $x_1 = 3/4$.

ii) Hier formt man

(a) $[II \rightsquigarrow II - I]$, $[III \rightsquigarrow III - 2I]$, $[IV \rightsquigarrow IV - III]$,
(b) $[II \rightsquigarrow -\frac{1}{2}II]$, $[III \rightsquigarrow -\frac{1}{3}III]$, $[III \leftrightarrow II]$

um mit dem Ergebnis

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & \lambda \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \lambda \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \lambda \end{array}\right) .$$

$\lambda \neq \frac{1}{2}$. In diesem Fall existiert offensichtlich keine Lösung.

$\lambda = \frac{1}{2}$. Rückwärtseinsetzen liefert mit $t \in \mathbb{R}$ beliebig:

$$x_4 = t \ , \quad x_3 = \frac{1}{2} + t \ , \quad x_2 = 1 + \frac{1}{3}t \ , \quad x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3}t \ ,$$

was wie üblich mit einer Probe verifiziert werden kann.

Aufgabe 3. Aus

i) $[III \to \frac{1}{2}(III - I)]$, $[II \to -\frac{1}{3}(II - 2I)]$,

ii) $[I \to I - III]$,

iii) $[I \to I - 2II]$

ergibt sich das Schema

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) .$$

Bitte wenden.

Teil 2. Lineare Unabhängigkeit, Dimension und Basis eines Vektorraums

Aufgabe 4.

i) Es werden etwa die folgenden beiden Umformungen durchgeführt:

(a) $[III \to III - aI]$,

(b) $[III \to III + a^2 II]$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a^3 & 0 \end{array}\right),$$

sodass die Vektoren für $a = -1$ nicht linear unabhängig sein können. Es ist beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{0}} .$$

Ist andererseits $a \neq -1$, so folgt $\lambda_3 = 0$ und durch Rückwärtseinsetzen unmittelbar auch $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$. Die Vektoren sind in diesem Fall linear unabhängig.

ii) Offenbar liegen die Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in V und sind linear unabhängig (überprüfen!).

Es sei nun $\underline{\mathbf{x}} \in V \subset \mathbb{R}^3$. Dann gilt ($[III \to III + I]$)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 + x_3 \end{array}\right),$$

sodass

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^2 = \underline{\mathbf{x}}$$

genau dann eine Lösung besitzt, wenn $x_1 + x_3 = x_2$ oder wenn äquivalent $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ gilt.

Wegen $\underline{\mathbf{x}} \in V$ ist letzteres erfüllt und $\lambda_1 = x_1$, $\lambda_2 = x_2$ ist die Lösung der obigen Gleichung.

Aufgabe 5.

i) Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig, so gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (nicht alle gleich Null) mit

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \cdots + \lambda_k \underline{\mathbf{v}}^{(k)} = \underline{\mathbf{0}} \ .$$

Ist $\underline{\mathbf{v}}^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ ein weiterer Vektor, so setze $\lambda_{k+1} = 0$ und es ist mit $\lambda_i \neq 0$ für mindestens ein $i = 1, \ldots, n$,

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \cdots + \lambda_k \underline{\mathbf{v}}^{(k)} + \lambda_{k+1} \underline{\mathbf{v}}^{k+1} = \underline{\mathbf{0}} \ .$$

Per definitionem sind die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)}, \underline{\mathbf{v}}^{(k+1)}$ damit linear abhängig.

ii) Die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ seien linear unabhänngig.

Wären z.B. die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig, so folgte aus Teil i) sofort, dass auch $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig wären, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufage 6.

i) Da $\mathcal{V}$ nach Voraussetzung eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist und wegen $\dim \mathbb{R}^n = n$, existert im $\mathbb{R}^n$ kein weiterer von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(n)}$ linear unabhängiger Vektor.

Also gibt es zu jedem $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$, nicht alle gleich Null, mit

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(3)} + \ldots \lambda_n \underline{\mathbf{v}}^{(n)} + \lambda \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \ .$$

Wäre $\lambda = 0$, so wären wegen der linearen Unabhängigkeit der $\underline{\mathbf{v}}^{(i)}$ alle λ_i, $i = 1, \ldots, n$, ebenfalls Null, was einen Widerspruch ergäbe.

Also folgt

$$\underline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)} \quad \text{mit} \ \ \alpha_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda} \ .$$

ii) Aus

$$\underline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)}$$

folgt unmittelbar

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \underline{\mathbf{v}}^{(i)} = \underline{\mathbf{0}}$$

und die lineare Unabhängigkeit der $\underline{\mathbf{v}}^{(i)}$ impliziert für alle $i = 1, \ldots, n$: $\alpha_i = \beta_i$.