Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Saarbrücken, 11.01.2019

Lösungshinweise: Präsenzübung 5 zur Vorlesung
Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Matrizenmultiplikation

Aufgabe 1. Wegen $A \in M(n,m)$ und $B \in M(m,l)$ gilt $B^T \in M(l,m)$ und $A^T \in M(m,n)$, sodass

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (B^T)_{ik}(A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (B)_{ki}(A)_{jk} = (AB)_{ji} = (AB)^T_{ij}$$

für alle $i = 1, \ldots, l$ und $j = 1, \ldots, n$. Also gilt

$$(AB)^T = B^T A^T .$$

Teil 2. Determinante

Aufgabe 2. Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in M(2,2)$$

gilt

$$\begin{aligned}
\det\,(AB) &= \det \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \\
&= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\
&= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} \\
&\quad - a_{21}b_{11}a_{11}b_{12} - a_{21}b_{11}a_{12}b_{22} - a_{22}b_{21}a_{11}b_{12} - a_{22}b_{21}a_{12}b_{22} \\
&= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} - a_{21}b_{11}a_{12}b_{22} - a_{22}b_{21}a_{11}b_{12} \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) \\
&= \det A \cdot \det B .
\end{aligned}$$

Bitte wenden.

Aufgabe 3. Es sei $A(n)$ die Aussage

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ .$$

Induktionsanfang. (Beweis von $A(1)$)
Es ist

$$\det(a_{11}) = a_{11} \ ,$$

sodass $A(1)$ richtig ist.

Induktionsschritt. ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Es wird bewiesen, dass die *Induktionsvoraussetzung*

$$A(n): \qquad \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

die *Induktionsbehauptung*

$$A(n+1): \qquad \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n+1)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{(n+1)(n+1)} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii}.$$

impliziert.

Entwicklung nach der ersten Spalte liefert nach der Induktionsvoraussetzung (vorletzte Gleichung)

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n+1)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{(n+1)(n+1)} \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} \\ &= a_{11} \cdot \det A_{11} \\ &= a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2(n+1)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{(n+1)(n+1)} \end{pmatrix} \\ &= a_{11} \cdot \prod_{i=2}^{(n+1)} a_{ii} \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii} \ . \end{aligned}$$

Damit ist $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt. □

Teil 3. Eigenwerte und Eigenvektoren

Aufgabe 4. Es ist (z.B. Entwicklung nach der dritten Zeile)

$$\det\,(A - \lambda I_{n=3}) = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

mit den drei unterschiedlichen Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$.

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ berechnen sich aus

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

zu

$$\underline{\mathbf{v}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Analog impliziert

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

als Lösungen

$$\underline{\mathbf{v}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

sowie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

schließlich

$$\underline{\mathbf{v}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Im Fall der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

berechnet man wieder das sogenannte *charakteristische Polynom*

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \det\,(B - \lambda I_{n=3}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2(1-\lambda) . \end{aligned}$$

Bitte wenden.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d.h. die Eigenwerte von B, sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$.

Für die Eigenvektoren zum Eigenwert λ_i, $i = 1, 2$, gilt

$$(B - \lambda_i I_{n=3})\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2-\lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_i \end{pmatrix} \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{0}} \, .$$

Als Lösungsmengen erhält man die sogenannten *Eigenräume*

$$E_{\lambda_1=2} = \{\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3 : \ v_3 = 0\}$$

und

$$E_{\lambda_2=1} = \{t\underline{\mathbf{w}} : \ t \in \mathbb{R}\} \, , \qquad \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \, .$$

Bei der Matrix C erkennt man unmittelbar, dass $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert ist.

Als Eigenvektoren ergeben sich

$$\underline{\mathbf{v}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, , \qquad t \in \mathbb{R} \, .$$

Teil 4. (Nicht-) Lineare Regression

Aufgabe 5. Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \, , \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \, ,$$

und man berechnet

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix} \, , \qquad A^T \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix} \, .$$

Die Lösung der Normalgleichung

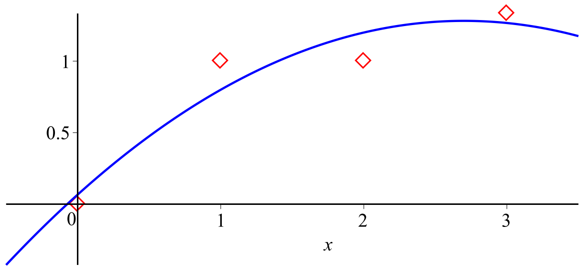
$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix}$$

lautet

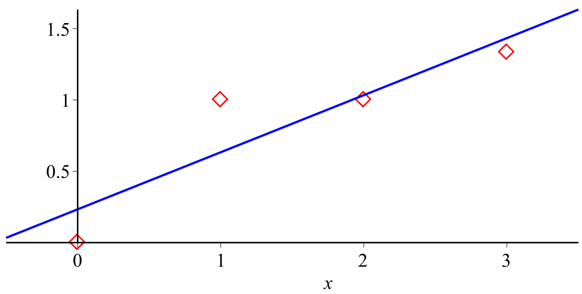
$$a_1 = \frac{1}{15} \, , \qquad a_2 = \frac{9}{10} \, , \qquad a_3 = -\frac{1}{6} \, ,$$

man findet (siehe obere Abbildung)

$$f(x) = \frac{1}{15} + \frac{9}{10}x - \frac{1}{6}x^2 \, .$$



Zu den gleichen Daten wurde in der Vorlesung die lineare Regression besprochen. Diese Ausgleichsgerade
$$f(x) = \frac{7}{30} + \frac{2}{5}x \,.$$
ist unten zum Vergleich dargestellt.



Teil 5. Funktionen: Eigenschaften, Verkettung

Aufgabe 6.

$i)$ Ausgefüllte Tabelle:

„äußere" Funktion $f(x)$	„innere Funktion" $g(x)$	Verkettung $h(x) = f(g(x))$
$f(x) = x^3$	$g(x) = 5x^2 - 6$	$h(x) = (5x^2 - 6)^3$
$f(x) = e^x$	$g(x) = -31x$	$h(x) = e^{-31x}$
$f(x) = x + e^x$	$g(x) = 5x + 3$	$h(x) = 5x + 3 + e^{5x+3}$
$f_t(x) = tx^3$	$g_t(x) = 5x^2$	$h_t(x) = t(5x^2)^3$
$f_t(x) = te^x$	$g_t(x) = -3tx$	$h_t(x) = te^{-3tx}$

Bitte wenden.

ii) (a) $f \circ g$: Einem Auto wird der Preis für eine komplette Tankfüllung zugeordnet.

(b) $f \circ g$ Einem Autobesitzer wird die Farbe seines Autos zugeordnet.

(c) $f \circ g$ liefert die Liga, in der ein Fußballer spielt.

iii) (a) Man argumentiere mit den Eigenschaften „injektiv" und „surjektiv" oder wegen der Existenz von f^{-1} und g^{-1}

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = id \,, \qquad \text{d.h. } (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \,.$$

(b) Dies folgt direkt aus $\mathrm{bild}(f \circ g) \subset \mathrm{bild}(f)$.

(c) Man betrachte beispielsweise die injektive Funktion

$$g\colon \{1,2\} \mapsto \{1,2,3\} \text{ mit } g(1) = 1,\ g(2) = 2$$

sowie

$$f\colon \{1,2,3\} \mapsto \{1,2\} \text{ mit } f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 1.$$

Es ist

$$f \circ g : \ \{1,2\} \to \{1,2\} \,, \qquad (f \circ g)(1) = 1 \,, \ \ (f \circ g)(2) = 2 \,,$$

bijektiv, die Funktion f ist aber nicht injektiv.