Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Saarbrücken, 25.01.2019

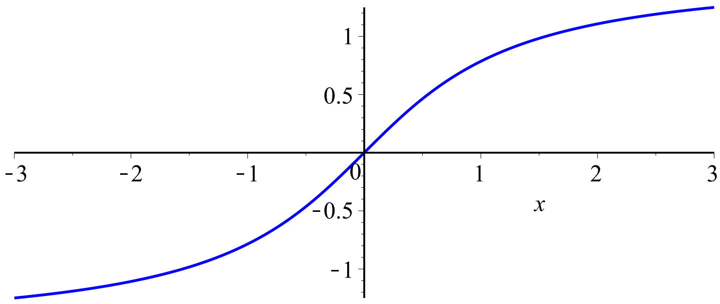
Lösungshinweise: Präsenzübung 6 zur Vorlesung
Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Eigenschaften von Funktionen

Aufgabe 1. Ein typisches Beispiel ist der *Arcustangens*. Es ist

$$\tan : \quad (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R} \quad \text{eine bijektive Funktion,}$$

d.h. die Umkehrfunktion existiert mit den geforderten Eigenschaften (siehe Abbildung),



$$\arctan : \quad \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2) \ .$$

Das Supremum ist $\pi/2$, das Infimum $-\pi/2$.

Gäbe es einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) = \arctan(x_0) = \pi/2$, so wäre aufgrund der strengen Monotonie (die Bijektivität wird für dieses Argument nicht benötigt)

$$f(x_0) < f(x_0 + 1) \ ,$$

was der Eigenschaft „Supremum" widerspricht.

Das Maximum kann also nicht angenommen werden und ebenso gibt es kein Minimum.

Bitte wenden.

Teil 2. Grenzwerte von Folgen

Aufgabe 2.

(a) Man erkennt die Ungleichungen:

$$\begin{aligned} n^4 - 3n^2 &> \frac{1}{2} n^4 \quad \text{für alle } n \geq 3 \quad \text{und} \\ 3n^2 - 1 &< 3n^2 \,, \quad \text{d.h.} \end{aligned}$$

$$\frac{n^4 - 3n^2}{3n^2 - 1} > \frac{1}{2} n^4 \, \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{6} n^2 \,.$$

Die Folge ist unbeschränkt und damit divergent.

(b) Es existieren die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \quad \text{und} \\ \lim_{n \to \infty} \frac{n^4 + 1}{\frac{1}{2} n^4 + 1} &= \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{n^4}} = 2 \,. \end{aligned}$$

Mit dem Produkt konvergenter Folgen existiert der Grenzwert des Produktes:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} \, \frac{n^4 + 1}{\frac{1}{2} n^4 + 1} = 2 \,.$$

(c) Es gilt für $n \to \infty$:

$$\frac{n^2 - \frac{1}{n^2}}{n^{5/2} + (-1)^n n^2} = \frac{n^{-1/2} - n^{-9/2}}{1 + (-1)^n n^{-1/2}} \to 0 \,.$$

(d) Eine einfache Umformung zeigt

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{1+n} + \frac{n^3}{1-n^2} &= \frac{n^2}{1+n} + \frac{n^3}{(1+n)(1-n)} \\ &= \frac{n^2(1-n) + n^3}{(1+n)(1-n)} = \frac{n^2}{1-n^2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{n^2} - 1} \end{aligned}$$

und es folgt

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{n^2}{1+n} + \frac{n^3}{1-n^2} \right] = -1 \,.$$

Teil 3. Logarithmengesetze

Aufgabe 3. Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion exp: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ folgt

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln(a)} = e^{x\ln(a)} + e^{y\ln(a)} = a^x + a^y \ .$$

i) Es gilt

(a) $a^{\log_a(xy)} = xy = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}$,

(b) $a^{\log_a(\frac{x}{y})} = \frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}} = a^{\log_a(x)-\log_a(y)}$,

(c) $a^{\log_a(x^t)} = x^t = \left(a^{\log_a(x)}\right)^t = a^{t\log_a(x)}$

für alle a, x, $y > 0$, $a \neq 1$ und alle $t \in \mathbb{R}$ und die Injektivität der allgemeinen Exponentialfunktion a^x: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ liefert die zu zeigenden Logarithmengesetze aus den obigen Gleichungen.

ii) Für a, b, $x > 0$, a, $b \neq 1$ gilt

$$a^{\log_a(b)\log_b(x)} = \left(a^{\log_a(b)}\right)^{\log_b(x)} = b^{\log_b(x)} = x = a^{\log_a(x)}$$

und die Injektivität der allgemeinen Exponentialfunktion a^x: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ liefert

$$\log_a(b)\log_b(x) = a^{\log_a(x)} \ ,$$

sodass

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \ .$$

Teil 4. Wachstum der Exponentialfunktion

Aufgabe 4. Es sei $k \in \mathbb{N}_0$.

i) Für $x \in [0, \infty]$ gilt $\frac{x^k}{k!} \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, sodass (Weglassen aller anderen Summanden)

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq k+1}} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

ii) Aus *i)* folgt

$$x_n^{-k}\exp(x_n) > x_n^{-k} \cdot \frac{x_n^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{x_n}{(k+1)!} \overset{n\to\infty}{\to} \infty,$$

sodass $\lim_{n\to\infty} x_n^{-k}\exp(x_n) = \infty$.

Bitte wenden.

iii) Aus *i)* folgt auch

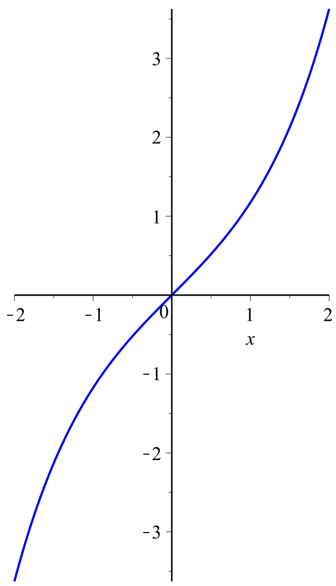
$$0 \leq x_n^k \exp(-x_n) = \frac{x_n^k}{\exp(x_n)} \leq \frac{x_n^k}{\frac{x_n^{k+1}}{(k+1)!}} = \frac{(k+1)!}{x_n} \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

sodass $\lim_{n\to\infty} x_n^k \exp(-x_n) = 0$ nach dem Einschließungskriterium.

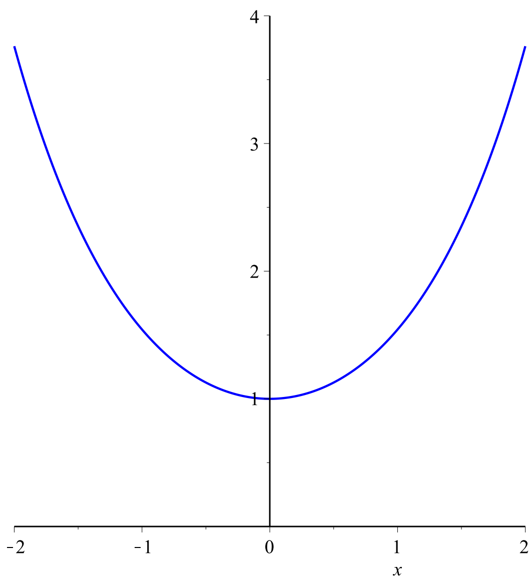
Bemerkung. In diesem Sinne wächst also die Exponentialfunktion stärker als jede Potenz.

Teil 5. Hyperbelfunktionen

Aufgabe 5. Der Sinus hyperbolicus:



und der Kosinus hyperbolicus:



Es seien x, $y \in \mathbb{R}$. Mithilfe der Definitionen der Hyperbelfunktionen berechnet man

$$\begin{aligned}
&\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \\
&= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}(e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y} + e^x e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}) \\
&= \frac{1}{4}(2e^x e^y - 2e^{-x} e^{-y}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)}) \\
&= \sinh(x+y)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}(e^x e^y + e^x e^{-y} + e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y} + e^x e^y - e^x e^{-y} - e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}) \\
&= \frac{1}{4}(2e^x e^y + 2e^{-x} e^{-y}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-(x+y)}) \\
&= \cosh(x+y)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \frac{1}{4}((e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2) \\
&= \frac{1}{4}(e^{2x} + 1 + 1 + e^{-2x} - e^{2x} + 1 + 1 - e^{-2x}) \;=\; 1\,.
\end{aligned}$$