Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Saarbrücken, 23.11.2018

Lösungshinweise: Übungsblatt 3 zur Vorlesung
Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Kombinatorik

Aufgabe 1. In einem Bücherregal sind 5 Plätze frei.

i) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, 5 verschiedene Bücher aufzustellen?

Es gibt 5! Permutationen (ohne Wiederholung) eines 5-Tupels.

ii) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 gleiche Bücher auf die 5 Plätze zu verteilen?

Jede Möglichkeit ist charakterisiert durch drei Platznummern aus $\{1, \dots, 5\}$, die Anzahl der 3-elementigen Teilmengen einer 5-elementigen Menge (k-Kombination ohne Wiederholung) ist

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 10 \, .$$

iii) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 rote und zwei grüne Bücher aufzustellen, wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 rote, 1 grünes und ein blaues Buch aufzustellen (nur die Farbe zählt)?

Nach *ii*) gibt es 10 Möglichkeiten für die 3 roten und die zwei grünen Bücher, bei einem günen und einem blauen Buch erhöht sich diese auf 20.

Teil 2. Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen

Aufgabe 2. Es ist stets

$$|x| \geq x \quad \text{und damit} \quad \big||x| - x\big| = |x| - x \, ,$$

es ist also $M_1 = M_2 =: M$,

$$M = \{x \in \mathbb{R} : \ |x+4| + |x| - x - 8 < 0\} \, .$$

Bitte wenden.

Fall 1. $x \geq -4$. Hier ist eine weitere Fallunterscheidung notwendig.

i) $x \leq 0$. Dann gilt für die Elemente aus M

$$\begin{aligned} x+4-2x-8 &< 0\,, \quad \text{d.h.} \\ -x &< 4\,, \quad \text{also} \\ x &> -4 \quad \text{und damit gilt} \\ \mathbb{L}_1 &= (-4,0]\,. \end{aligned}$$

ii) $x > 0$. Dann folgt aus

$$x+4-8<0$$

unmittelbar $x < 4$ und es ist

$$\mathbb{L}_2 = (0,4)\,.$$

Fall 2. $x < -4$. In diesem Fall muss die Ungleichung

$$-x-4-2x-8<0$$

gelten, was äquivalent zu $-3x < 12$ und damit zu $x > -4$ ist, also einen Widerspruch zur Annahme liefert. Der Fall $x < -4$ liefert also keinen Beitrag zur Lösungsmenge.

Es ist

$$M = (-4,4)\,.$$

Aufgabe 3. Für $x = a$ ist die Behauptung trivial, es sei also $\frac{1}{a} \leq x < a$. Es gilt

$$x + \frac{1}{x} \leq a + \frac{1}{a} \Leftrightarrow x - a \leq \frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{x-a}{ax}\,.$$

Wegen $x - a < 0$ ist dies wiederum äquivalent zu

$$1 \geq \frac{1}{ax}\,,$$

d.h. wegen $x > 0$ erkennt man die Äquivalenz zu

$$x \geq \frac{1}{a}\,,$$

was vorausgesetzt ist. $\square$

Teil 3. Beschränktheit von Mengen

Aufgabe 4.

M	oben	unten	beschr.	$\overline{K}$	$\underline{K}$	sup	max	inf	min
M_1	j	j	j	$c+1$	a	c	-	a	-
M_2	n	j	n	-	0	-	-	2	2
M_3	n	j	n	-	0	$-$	-	1	-
M_4	j	n	n	1	-	1	1	-	-
M_5	n	j	n	-	0	-	-	3/2	-

Teil 4. Polynomdivision und Zerlegung in Linearfaktoren

Aufgabe 5.

i) Es ist

$$\begin{array}{rlll}
 & (2x^4+2x^3+0\cdot x^2-x+1):(x^2-2x+1) & = & \mathbf{2x^2}+\mathbf{6x}+\mathbf{10}+\text{Rest}\ , \\
- & \underline{\mathbf{2x^4-4x^3+2x^2}} & & \\
 & \quad 6x^3-2x^2-x+1 & & \\
- & \quad \underline{\mathbf{6x^3-12x^2+6x}} & & \\
 & \qquad \mathbf{10x^2-7x+1} & & \\
- & \qquad \mathbf{10x^2-20x+10} & &
\end{array}$$

mit

$$\text{Rest} = \frac{\mathbf{13x-9}}{x^2-2x+1}\ .$$

Durch Multiplikation der rechten Seite mit x^2-2x+1 kann leicht die Probe gemacht werden.

ii) (a) Es ist z.B. $x_0=2$ Nullstelle von $p(x)$ und

$$\begin{array}{rlll}
 & (x^3-2x^2+2x-4):(x-2) & = & x^2+2\ , \\
- & \underline{x^3-2x^2} & & \\
 & \qquad 2x-4 & & \\
- & \qquad \underline{2x-4} & & \\
 & \qquad\quad 0 & &
\end{array}$$

wobei das Ergebnis wieder durch eine Probe bestätigt wird.

Es gilt also

$$p(x) = (x-2)\cdot(x^2+2)\ ,$$

wobei x^2+2 irreduzibel ist.

Bitte wenden.

(b) Hier kann man die Nullstelle $x_0 = -1$ von $p(x)$ raten:

$$\begin{array}{rll}
& (2x^3 - 10x^2 + 6x + 18) : (x+1) & = \quad 2x^2 - 12x + 18 \; . \\
- & \underline{2x^3 + 2x^2} & \\
& \quad -12x^2 + 6x & \\
- & \quad \underline{-12x^2 - 12x} & \\
& \qquad\qquad 18x + 18 & \\
- & \qquad\qquad \underline{18x + 18} & \\
& \qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Wieder bestätigt eine Probe das Ergebnis.

In diesem Fall hat man

$$p(x) = (x+1) \cdot (2x^2 - 12x + 18) = 2(x+1)(x-3)^2 \; .$$