Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Saarbrücken, 21.12.2018

Lösungshinweise: Übungsblatt 5 zur Vorlesung
Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Norm und Skalarprodukt

Aufgabe 1. Der Winkel zwischen $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ betrgt $90°$ genau dann, wenn

$$0 = \langle \underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)} \rangle = 2a^2 + a + \frac{1}{16}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$a = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Teil 2. Matrizenmultiplikation

Aufgabe 2.

i) Die Matrixprodukte AC und CBA existieren nicht. Es gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -12 \\ -9 & 12 & -18 \\ -3 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -13 \\ -6 & 9 & -15 \end{pmatrix}$$

sowie

$$A^TC = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 7 \\ -8 & -11 \end{pmatrix}, \quad C^TA = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -5 & 7 & -11 \end{pmatrix}, \quad ABC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ii) Damit B^TCA^T definiert ist, muss $n_2 = n_6$ und $n_5 = n_3$ erfüllt sein.

Wegen $CA^T \in M(n_5, n_1)$ gilt $B^TCA^T \in M(n_4, n_1)$, d.h. B^TCA^T hat n_4 Zeilen und n_1 Spalten.

Bitte wenden.

iii) Gäbe es $A = (a_{ij})_{i=1,2}^{j=1,2,3}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

so folgte aus der ersten und der dritten Zeile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

aber $a_{11}+a_{21} = 2 \neq 0$, also gibt es keine Matrix A mit der gewünschten Eigenschaft.

Teil 3. Inverse Matrix, Determinante

Aufgabe 3. Die Regel folgt sofort aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz durch eine Entwicklung z.B. nach der ersten Spalte.

Für eine 4x4-Matrix ergeben sich $4 \cdot 6 = 24$ Summanden.

Aufgabe 4. Man berechnet (z.B. Entwicklung nach der ersten Spalte)

$$\det A = (-a) - 2(4-3a) - 2 = 5a - 10 = 5(a-2) .$$

Ist $a = 2$, so ist detA = 0 und die Matrix folglich nicht invertierbar.

Es sei nun also $a = 2$. Elementare Zeilenumformungen

i) $[II \to 2I - II]$, $[III \to III + I]$,

ii) $[II \to \frac{1}{5}II]$, $[III \to \frac{1}{5}III]$,

iii) $[II \to II - III]$, $[III \to III - \frac{2+a}{4}II]$,

iv) $[II \to \frac{5}{2-a}II]$, $[III \to \frac{4}{2-a}III]$,

v) $[I - 2II - 3III]$

ergeben nach dem Gaußschen Algorithmus

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & a & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccr|crc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2+a & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2+a}{5} & 1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2-a}{5} & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2-a}{4} & -\frac{a}{10} & \frac{2+a}{20} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5(2-a)}5 & \frac{1}{5(2-a)}(-5) & \frac{1}{5(2-a)}(-5) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5(2-a)}(-2a) & \frac{1}{5(2-a)}(2+a) & \frac{1}{5(2-a)}4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5(2-a)}a & \frac{1}{5(2-a)}(4-3a) & \frac{1}{5(2-a)}(-2) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5(2-a)}5 & \frac{1}{5(2-a)}(-5) & \frac{1}{5(2-a)}(-5) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5(2-a)}(-2a) & \frac{1}{5(2-a)}(2+a) & \frac{1}{5(2-a)}4 \end{array}\right).$$

Im Fall $a \neq 2$ existiert wie bereits erwähnt die Inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{5(2-a)} \begin{pmatrix} a & 4-3a & -2 \\ 5 & -5 & -5 \\ -2a & 2+a & 4 \end{pmatrix},$$

was durch eine Probe unmittelbar verifiziert werden kann.

Schließlich berechnet man

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden.

Teil 4. Lineare Regression

Aufgabe 5.

i) Zu den Daten wird zunächst gebildet:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Damit ist

$$A^T \underline{\mathbf{y}} = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Weiter berechnet man

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} .$$

Die Normalgleichung $A^T A \underline{\mathbf{a}} = A^T \underline{\mathbf{y}}$ im gesuchten $\underline{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^2$ lautet demnach

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} ,$$

das Gaußsche Eliminationsverfahren führt auf

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|r} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 9/10 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/10 \\ 0 & 1 & 9/10 \end{array} \right)$$

Die Lösung ist

$$f(x) = \frac{3}{10} + \frac{9}{10} x .$$

ii) Mit $\overline{x} = 1/2$ und $\overline{y} = 3/4$ folgt

$$s_x^2 = \frac{5}{3} \quad \text{sowie} \quad s_{xy} = \frac{3}{2} .$$

Es ergibt sich (vgl. *i*))

$$\overline{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \overline{x} = \frac{3}{10} , \qquad \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{9}{10} .$$