Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Saarbrücken, 25.01.2019

Lösungshinweise: Zusatzübungsblatt zur Vorlesung
Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Grenzwerte von Folgen

Aufgabe 1. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{9}{n}+\frac{14}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{9}{n}+\frac{14}{n^2}} = 3$$

und

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\frac{7}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{7}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}\right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Für alle $n \geq 3$ gilt schließlich

$$\begin{aligned}
\frac{n^3+4n+4}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n^3(1+\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n^3})}{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})} \\
&= n \cdot \frac{1+\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \\
&\geq n \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \\
&\overset{n\geq 3}{\geq} \frac{1}{3} n\,.
\end{aligned}$$

Also ist die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben unbeschrnkt und somit divergent.

Bitte wenden.

Teil 2. Berechnung von Ableitungen

Aufgabe 2

i) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \longmapsto \exp(\exp(x))\,,$$

ist differenzierbar als Verkettung differenzierbarer Funktionen mit

$$\frac{df}{dx}(x) = \exp(\exp(x)) \cdot \exp(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) Die Funktion

$$f :\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \longmapsto a^x = \exp(x \ln(a))\,,$$

ist differenzierbar als Verkettung differenzierbarer Funktionen mit

$$\frac{df}{dx}(x) = a^x \cdot \ln(a)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

iii) Die Funktion

$$f :\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \longmapsto \frac{1-x}{1+x^2}\,,$$

ist differenzierbar als Verkettung/Summe/Produkt/Quotient differenzierbarer Funktionen mit

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{-1(1+x^2)-(1-x)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

iv) Die Funktion

$$f :\; \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\,, \qquad x \longmapsto \frac{1}{\ln(1+x^2)}\,,$$

ist differenzierbar als Verkettung/Summe/Produkt/Quotient differenzierbarer Funktionen mit

$$\frac{df}{dx}(x) = -(\ln(1+x^2))^{-2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{\ln^2(1+x^2)(1+x^2)}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$v)$ Die Funktion

$$f:\ (0,\infty)\to\mathbb{R}\ ,\qquad x\longmapsto x^x=\exp(x\ln(x))\ ,$$

ist differenzierbar als Verkettung differenzierbarer Funktionen mit

$$\frac{df}{dx}(x)=\exp(x\ln(x))\cdot(\ln(x)+1)$$

für alle $x\in(0,\infty)$.

Teil 3. Extremwerte

Aufgabe 3. Für alle $x\in\mathbb{R}$ ist

$$f'(x)=2x\sin(x)+x^2\cos(x)\ ,\qquad g'(x)=2x\cos(x)-x^2\sin(x)$$

und wegen $f'(0)=g'(0)=0$ handelt es sich in beiden Fällen um einen kritischen Punkt.

Die zweiten Ableitungen berechnen sich zu

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\sin(x)+4x\cos(x)-x^2\sin(x)\ ,\\ g''(x) &= 2\cos(x)-4x\sin(x)-x^2\cos(x)\ . \end{aligned}$$

Aus $g''(0)=2>0$ folgt mit der hinreichenden Bedingung, dass der Punkt $x_0=0$ eine lokale Minimalstelle von g ist.

Wegen $f''(0)=0$ hat man zunächst aber keine Aussage für die Funktion f.

Allerdings ist für $x<0$, $|x|$ hinreichend klein, $f(x)<0$ und für $x>0$, $|x|$ hinreichend klein, $f(x)>0$, d.h. im Nullpunkt kann kein lokales Extremum vorliegen – der Punkt $x_0=0$ ist ein Sattelpunkt der Funktion f.

Teil 4. Die Regeln von l'Hospital

Aufgabe 4. Die zweifache Anwendung der Regel von L'Hospital liefert (als Voraussetzung beachte man insbesondere $2\sin(x)\cos(x)\neq 0$, $\cos^2(x)-\sin^2(x)\neq 0$ für $x\neq 0$, x nahe bei $x_0=0$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh^2(x)-1}{\sin^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cosh(x)\sinh(x)}{2\sin(x)\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sinh^2(x)+\cosh^2(x)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)}=1\ .$$

Bitte wenden.

Die Funktionen

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2^x - 1,$$

und

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto e^x - 1,$$

sind differenzierbar mit $f(0) = g(0) = 0$ und $f'(x) = \ln(2)2^x$ bzw. $g'(x) = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$.

In ganz $\mathbb{R}$ gilt demnach die Voraussetzung $0 \neq g'(x)$ der Regel von l'Hospital und es folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(2)2^x}{e^x} = \ln(2).$$

Schließlich gilt nach der Regel von l'Hospital (die Voraussetzungen überprüft man wieder leicht)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x \sin(x) + e^x \cos(x)} = 0 .$$