Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Saarbrücken, 25.01.2019

Präsenzübung 6 zur Vorlesung
Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2018/2019

Teil 1. Eigenschaften von Funktionen

Aufgabe 1. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt* (*bzw. nach unten beschränkt*), falls es eine Konstante $\overline{M} \in \mathbb{R}$ (bzw. $\underline{M} \in \mathbb{R}$) gibt mit $f(x) \leq \overline{M}$ (bzw. $f(x) \geq \underline{M}$) für alle $x \in I$ – die Begriffe *Schranke*, *obere Schranke*, *untere Schranke*, *kleinste obere Schranke*, *größte untere Schranke*, *Infimum*, *Supremum*, *Minimum*, *Maximum* sind analog zu Mengen definiert.

Eine nach oben und nach unten beschränkte Funktion heißt *beschränkt*.

Finden Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \text{bild(f)}$, die bijektiv, streng monoton wachsend und beschränkt ist. Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum.

Kann eine Funktion mit den obigen Eigenschaften ihr Maximum bzw. Minimum annehmen?

Teil 2. Grenzwerte von Folgen

Aufgabe 2. Existieren die folgenden Grenzwerte und falls ja, berechnen Sie diese:

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 3n^2}{3n^2 - 1}\,, \qquad \text{(b)}\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,\frac{n^4+1}{\frac{1}{2}n^4 + 1}\,,$$

$$\text{(c)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \frac{1}{n^2}}{n^{5/2} + (-1)^n n^2}\,, \qquad \text{(d)}\quad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{1+n} + \frac{n^3}{1-n^2}\right].$$

Teil 3. Logarithmengesetze

Aufgabe 3.

i) Es sei $a > 0$ fixiert, $a \neq 1$. Leiten Sie für x, $y > 0$, $t \in \mathbb{R}$ die Logarithmengesetze aus den korrespondierenden Eigenschaften der Exponentialfunktion ab:

Bitte wenden.

(a) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$;

(b) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$;

(c) $\log_a x^t = t\log_a(x)$.

ii) Zeigen Sie ($a,\ b,\ x > 0,\ a,\ b \neq 1$):

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}\ .$$

Hinweis zur Erinnerung: Die Exponentialfunktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$$

für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Exponentialfunktion ist per definitionem gegeben durch

$$a^x := \exp(x\cdot\ln(a))\ .$$

Teil 4. Wachstum der Exponentialfunktion

Aufgabe 4. Für eine reelle Zahlenfolge $\{x_n\}$ setzt man (anlog der Fall „$-\infty$”):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Zu jedem } M > 0 \text{ existiert ein } N \in \mathbb{N}, \text{ sodass } M < x_n \text{ für alle } n > N.$$

Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ fixiert. Zeigen Sie für $\{x_n\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ (o.E. $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$):

$$i)\ \exp(x_n) > \frac{x_n^{k+1}}{(k+1)!}\ ,\quad ii)\ \lim_{n\to\infty} x_n^{-k}\exp(x_n) = \infty\ ,\quad iii)\ \lim_{n\to\infty} x_n^k \exp(-x_n) = 0\ .$$

Bemerkung. Man kann daraus folgern: Für alle $\alpha > 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$.

Teil 5. Hyperbelfunktionen

Aufgabe 5. Der *Sinus hyperbolicus* und der *Kosinus hyperbolicus* sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert als

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}\ ,\qquad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ .$$

Skizzieren Sie die Funktionen und rechnen Sie für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$ nach:

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)\ ;\\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)\ ;\\
\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1\ .
\end{aligned}$$

Bearbeitung und Besprechung.

In den Übungsgruppen *Fr., 25.01.2019, bis Do., 31.01.2019.*