Kap. 0. Aussagen & Mengen

D.h. Gegenstand & Sprache der Mathematik.

0.1 Heuristische Aussagenlehre.

In diesem Abschnitt geht es (vom intuitiven Standpunkt) um Mathematische Aussagen und deren Verifikation bzw. Falsifikation.

0.1.1 Was ist eine Aussage?

Im ersten Schritt (Blick ins Lexikon):

" Sprachliches Gebilde, welches einen Sachverhalt widerspiegelt."

Dabei können auch verschiedene Aussagen für denselben Sachverhalt stehen.

1tes Problem. Betr. den Satz (sprachliches Gebilde)

"Wie meist um diese Jahreszeit wird es morgen wohl überwiegend sonnig sein."

?: Vage Formulierungen, Prognosen für die Zukunft etc.

Eine einfache Aussagenlogik kommt mit solchen Sätzen nur schwer zurecht.

Deshalb im Folgenden: Es werden formalisierte Aussagen wie "2 ist eine natürliche Zahl" ("$2 \in \mathbb{N}$") betr.

- In der zweiwertigen Logik hat eine Aussage entweder den Wahrheitswert falsch oder richtig ("tertium non datur").

2tes Problem. i.) Ein sprachliches Gebilde steht oft an sich schon für einen Wahrheitswert (sozusagen ein intrinsischer Wahrheitswert).

ii.) Im formalen Zugang wird einem sprachlichen Gebilde ein Wahrheitswert zugeordnet, der nicht unbedingt mit dem intrinsischen übereinstimmen muss.

Auch dieses Problem sei durch die Einschränkung auf formalisierte Aussagen behoben:

Pragmatische Vorgehensweise.

Aussage : ("Satz", wahr/falsch),

Widersprüche zwischen sprachlicher Interpretation und Zuordnung gibt es nicht, d.h. es kann formal vorgegangen werden.

0.1.2 Wahrheitswerte & logische Operationen

A sei eine Aussage. Der Wahrheitswert ist

$$W(A) := \begin{cases} 0 & \text{für "A ist falsch"} \\ 1 & \text{für "A ist richtig"} \end{cases}$$

Die Größe auf der Seite des Doppelpunktes wird definiert.

Logische Operationen.

nur eine Aussage gegeben

a.) Negation $\neg A$ („nicht A")

Definition:

$w(A)$	$w(\neg A)$
1	0
0	1

Bsp. $A: 2 \in \mathbb{N}$

$\neg A: 2 \notin \mathbb{N}$

Weitere Operationen sind über die Wahrheitstafel definiert: A, B seien Aussagen:

zwei Aussagen

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

i.) Konjunktion $A \wedge B$ („A und B") (vgl. Wahrheitstafel)

Bsp. $\underbrace{(\text{15 ist durch 3 teilbar}) \wedge (\text{Die Erde ist eine Scheibe.})}_{\text{falsch}}$

ii.) Disjunktion $A \vee B$ ("A oder B") (vgl. Wahrheitstafel)

nicht ausschließend

Bsp. $\underbrace{(\text{15 ist durch 3 teilbar}) \vee (\text{Die Erde ist eine Scheibe})}_{\text{richtig.}}$

iii.) Implikation $A \Rightarrow B$ ("aus A folgt B") (vgl. Wahrheitstafel)

kein "wenn ... dann ..." im Sinne eines zeitlichen oder kausalen Zusammenhangs

Bekanntes Beispiel.

"Wenn es regnet, dann ist die Straße nass."

keine Überdachung ...

Mathematisch: "Es regnet." $\Rightarrow$ "Die Straße ist nass."

Beachte. Die Straße kann auch ohne Regen nass sein, der Regen ist eine hinreichende Bedingung, keine notwendige Bedingung.

Beachte. Ist A falsch, so ist $A \Rightarrow B$ per definitionem immer richtig.

Bsp. A: "$1+1=3$" B: "Paris liegt an Australiens Küste"

(vgl. analoges Bsp. nach Russel)

"$A \Rightarrow B$" ist per definitionem richtig, man kann auch wie folgt argumentieren:

$1+1=3 \Rightarrow 0=1 \Rightarrow x=0$ für alle reellen Zahlen x

$\Rightarrow s=0$, wobei s den Abstand Paris – australische Küste bezeichne.

$\square$
↑
q.e.d. Beweisende

iv.) Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ("A äquivalent zu B")

Bsp. "Es ist vormittags 5 Minuten nach 8." (vgl. Wahrheitstafel)

$\Leftrightarrow$ "Es ist 8.05 a.m."

↑ vgl. Bemerkung: verschiedene Aussagen ↔ dieselbe Sachverhalt

Übungsbeispiel. Es seien A, B, C Aussagen, die Implikationen $(A \Rightarrow B)$ und $(A \Rightarrow C)$ seien richtig, $(B \Rightarrow C)$ falsch. Welche Wahrheitswerte haben A, B, C?

Wahrheitstafel

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Rightarrow C)$	$w(B \Rightarrow C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

links: Alle verschiedenen Komb. $w(A), w(B), w(C)$ eintragen

einzige richtige Möglichkeit

Variablen in Aussagen, Quantoren.

Aussagen, die von veränderlichen Größen (Variablen) abhängen bezeichnet man oft als Aussageformen.

Bsp. $A(x,y)$ bezeichne die von x und y abhängige Aussage "$x^2+y^2=1$", d.h. $A(0,1)$ ist beispielsweise wahr, $A(1,1)$ falsch.

Quantoren für Aussageformen sind:

$\forall x : A(x)$ "Für alle x gilt $A(x)$."

$\exists x : A(x)$ "Es gibt (wenigstens) ein x, sodass $A(x)$ wahr ist."

$\exists_1 x : A(x)$ "Es gibt genau ein x, sodass $A(x)$ wahr ist."

Mathematische Sätze und Beweise.

Mathematische Satz: Implikation $A \Rightarrow B$.

A: Voraussetzung $\qquad B$: Behauptung

(vgl. Bsp. Paris ⇝ Madrid)

Ein direkter Beweis ist ein Kettenschluss

$$A =: A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n = B.$$

Ein indirekter Beweis basiert auf der Kontraposition

$$\neg B \Rightarrow \neg A.$$

Zur Äquivalenz $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$:

siehe Übungen.

Typisches Bsp.: $\sqrt{2}$ kann kein Bruch sein, vgl. Kap. 2.

nach G. Cantor im Gegensatz zur strengen Axiomatik

0.2 Naive Mengenlehre.

Intuitive Beispiele

i.) Zahlen: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ (vgl. Kap. 2)

ii.) Aufzählungen, Reihenfolge spielt keine Rolle,

z.B. $\{1,2,3\} = \{3,1,2\}$ aber nicht mehrmals dasselbe

iii.) Angedeutete Aufzählungen, z.B.

$\{1,2,3 \dots 50\}$ oder $\{1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}$

("..." muss unmissverständlich klar sein).

iv.) Charakterisierung durch gemeinsame Eigenschaft:

{ Studierende : Hauptfach Biologie }

v.) Leere Menge $\emptyset$: Enthält kein Element.

Definition 1. Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohl bestimmten und wohl unterschiedenen Objekten zu einem Ganzen.

Diese Objekte heißen Elemente der Menge.

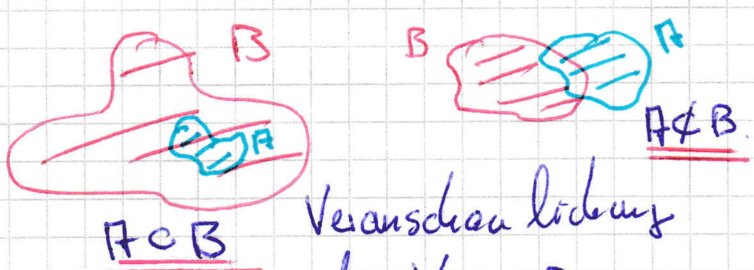
Notation. $x \in A$: x Element von A , $x \notin A$: x nicht Element von A

Vergleich von Mengen.

i.) A ist gleich B, $A = B$: A und B haben dieselben Elemente.

ii.) A ist Teilmenge von B, $A \subset B$: Jedes Element von A gehört zu B, d.h.

$x \in A \Rightarrow x \in B$.



Veranschaulichung als Venn-Diagramm

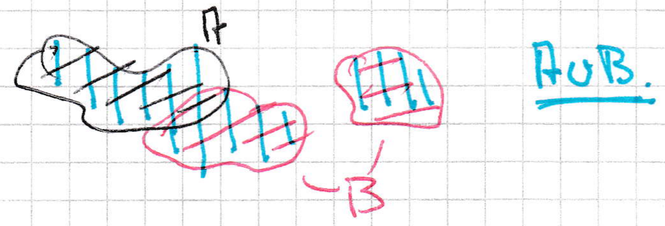
Bemerkung. Die Gleichheit von Mengen ist häufig nicht offensichtlich. Man zeigt sie oft mithilfe von

$$A = B \iff (A \subset B \wedge B \subset A),$$

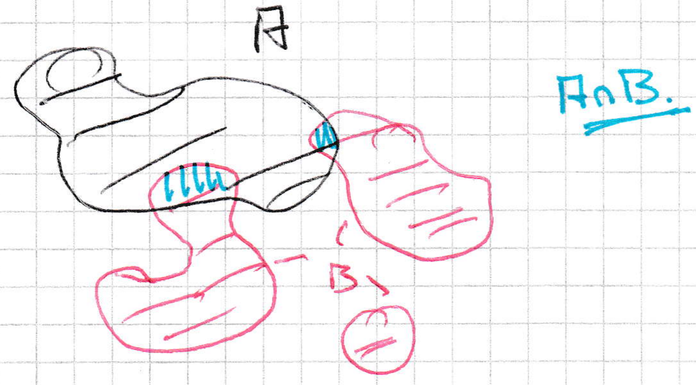
siehe Übungsbeispiel unten (Regeln von de Morgan).

Operationen mit Mengen. (Mengenalgebra)

i.) Vereinigung $A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

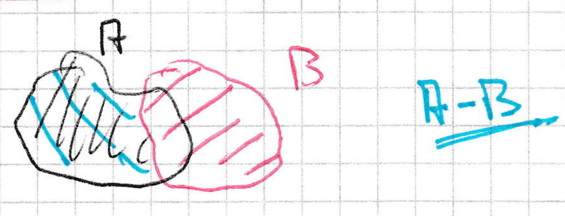


ii.) Durchschnitt $A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.



iii.) Differenz (oder Komplement von B in A).

$$A - B := A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$



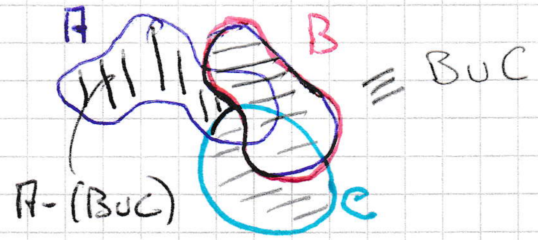
<u>Sprechweise.</u> Zwei Mengen A, B mit $A \cap B = \emptyset$ heißen <u>disjunkt</u>.

Für die Operationen mit Mengen gilt:

i.) $$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

ii.) Regeln von de Morgan:
$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$
$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

<u>Übungsbeispiel.</u> Erste Regel von de Morgan.



Zeige:
„$\Rightarrow$"

Es sei $a \in A - (B \cup C)$

$(\text{d.h. } a \in A \text{ und } a \notin B,\ a \notin C)$ — alle Punkte aus B und C herausgenommen

$\Rightarrow \quad a \in A - B$ und $a \in A - C$

$\Rightarrow \quad a \in (A - B) \cap (A - C)$, also die erste Implikation.

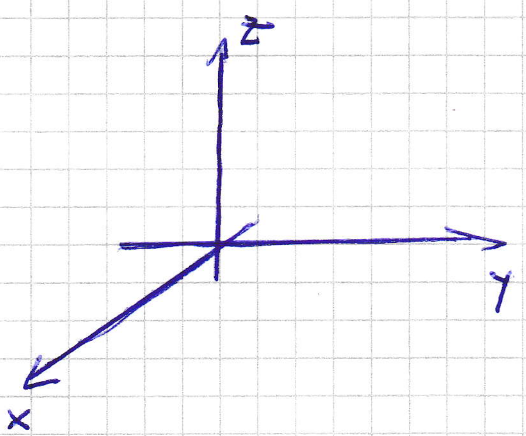
"$\Leftarrow$" Es sei nun $a \in (A-B) \cap (A-C)$

(d.h. ($a \in A$ und $a \notin B$) und ($a \in A$ und $a \notin C$))

$\Rightarrow a \in A$ und $a \notin (B \cup C)$

$\Rightarrow \quad a \in A-(B \cup C)$.

Der Raum unserer Anschauung: $\mathbb{R}^3$



bzw. Tupel

$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) = \dots$

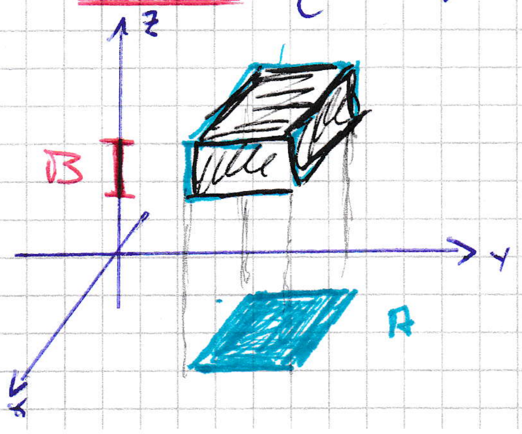
geordnet, d.h. die Reihenfolge ist wichtig.

x_1, x_2, x_3: Koordinaten

"Rechte-Hand-Regel": Richtungen der Achsen (x,y,z-Richt.) wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand.

Allgemein: Kartesisches Produkt von zwei Mengen A, B

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$



(Menge der geordneten Paare)

Offensichtliche Verallgemeinerung auf n Mengen $M_1, M_2, \dots, M_n$:

i.) $$\bigcup_{k=1}^{n} M_k := M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$$

vgl. Indizes beim Summenzeichen, Kap. 1

ii.) $$\bigcap_{k=1}^{n} M_k = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$$

iii.) $$\prod_{k=1}^{n} M_k := M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$$

Bsp. $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{R}.$$