Kap. 5 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

5.1 Lineare Gleichungssysteme

Man betrachte als Beispiel 2 Gleichungen in 2 Unbekannten:

Problemstellung. Wie viele Kilogramm Salzsäure der Konzentration 12% und 20% muss man mischen, um 10 kg Salzsäure der Konzentration 15% zu erhalten?

Es sei: x_1: ges. Masse der 12%igen Salzsäure
x_2: ges. Masse der 20%igen Salzsäure

Es muss gelten:

$$x_1 + x_2 = 10 \qquad (1)$$

$$0.12 x_1 + 0.2 x_2 = 1{,}5 \qquad (2)$$

kg. Salzsäure in x_1 — kg in x_2 — 15% von 10kg

Auf jeden Fall sind aus der Schule bekannt:

a.) Einsetzverfahren: Eine Variable wird aus einer Gleichung berechnet und in die andere eingesetzt:

5.2

(1): $x_1 = 10 - x_2$

in (2) eingesetzt: $0.12(10-x_2) + 0.2\,x_2 = 1.5$

$\iff 0.08\,x_2 = 1.5 - 1.2 = 0.3$

$\iff \underbrace{x_2 = 3.75}_{=15/4}$ & (1) zeigt $x_1 = 6.25 = 25/4$

immer Probe machen!

b) Gleichsetzungsverfahren

Zwei nach dieselben Variablen freigestellte Gleichungen werden gleichgesetzt:

(1): $x_1 = 10 - x_2$

(2): $x_1 = \frac{1.5}{0.12} - \frac{0.2}{0.12}x_2 = \frac{25}{2} - \frac{5}{3}x_2$

$\frac{25}{2} - \frac{5}{3}x_2 = 10 - x_2 \iff \frac{2}{3}x_2 = \frac{5}{2}$

$\iff x_2 = \frac{15}{4} = 3.75$ s.o.

c) Additions- (oder Subtraktions-) Verfahren.

Die einzelnen Gleichungen werden so multipliziert, dass bei der Addition (Subtraktion) zweier Gleichungen eine Variable wegfällt.

$$x_1 + x_2 = 10 \quad (1)$$

$$-\left[\,x_1 + \frac{0.2}{0.12}x_2 = \frac{1.5}{0.12}\,\right] \quad (2)$$

$x_2 - \frac{0.2}{0.12}x_2 = 10 - \frac{1.5}{0.12} \iff x_2\left(1-\frac{5}{3}\right) = 10 - \frac{25}{2}$

$\iff x_2 = 3.75 = \frac{15}{4}$ s.o.

Konkreter Gegenstand dieses Abschnittes:

$\#\text{Gleichungen} \leq \#\text{Unb.}$

Lineare Gleichungssysteme, d.h. für $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$ betrachtet man mit fixierten Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ und mit festen $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, (rechte Seite):

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}\right\} n \text{ Gleichungen}$$

Gesucht: Die m Unbekannten $x_1, \dots x_m \in \mathbb{R}$ als Lösung dieses Systems

5.1.1 Das Gaußsche Eliminationsverfahren

(oder Gauß-Algorithmus)

- Mit dem Verfahren kann das Problem systematisch angegangen werden.
- Hier: Die Vorgehensweise wird anhand von charakteristischen Beispielen erläutert.

Beispiele

i.) 3 Gleichungen in 3 Unbekannten.

Man betrachte die Gleichungen

$$(a)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 3, \end{aligned}$$

sowie für eine fixierte Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(b)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= \lambda \end{aligned}$$

Man erkennt schon einen Zusammenhang zwischen der Summe der ersten beiden Gl. und der dritten

ii.) 2 Gleichungen in 4 Unbekannten

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Schematische Darstellung.

Die Koeffizienten und die rechte Seite werden wie folgt schematisch angeordnet:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

In den Beispielen.

i.) (a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \lambda \end{array}\right)$

ii.)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Elementare Zeilenumformungen.

Die Lösungsmenge (d.h. die Menge aller Lösungen) ändert sich offensichtlich nicht, wenn:

i.) Die Reihenfolge der Gleichungen geändert wird, d.h. wenn zwei Zeilen vertauscht werden.

ii.) Das Vielfache einer Gleichung betrachtet wird, d.h. wenn eine Zeile mit einem Faktor $0 \neq a \in \mathbb{R}$ multipliziert wird.

iii.) Eine Gleichung bzw. deren Vielfaches zu einer anderen Gleichung addiert wird, d.h. wenn das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert wird.

Bemerkung. Diese Operationen sind natürlich auch auf die rechte Seite anzuwenden.

Ziel der elementaren Zeilenumformungen:

Zeilenstufenform.

Am Ende des Verfahrens soll das Schema die Form haben: (mit neuen Koeff. $\tilde{a}_{ij}$, neuen $\tilde{b}_i$)

$$(*)\quad \left(\begin{array}{cccccccccc|c}
1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \cdots & \tilde{a}_{1(r-1)} & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1(r+1)} & \cdots & \tilde{a}_{1n} & & \tilde{b}_1 \\
0 & 1 & \tilde{a}_{23} & \cdots & \tilde{a}_{2(r-1)} & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2(r+1)} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & & \tilde{b}_2 \\
0 & 0 & 1 & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & & & & & & & \\
0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 & \tilde{a}_{r(r+1)} & \cdots & \tilde{a}_{rn} & & \tilde{b}_r \\
\hline
0 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 & & \tilde{b}_{r+1} \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 & & \tilde{b}_m
\end{array}\right)$$

$r \leq n$

$r \leq m$

↳ ⇝ Rang
⇝ linear Unabh.

Zur Lösung der Beispiele.

Auswahl & Reihenfolge der elem. Zeilenumformungen sind nicht vorgegeben.

kein mathematisch definiertes Zeichen, deutet hier elem. Zeilenumformungen an

(a.)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\text{vertausche } 2^{te} \,\&\, 3^{te} \text{ Zeile}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{"}3^{te} - 1^{te}\text{"}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{2 \cdot 2^{te} + 3^{te}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$\underset{3^{te} \cdot \frac{1}{2}}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \end{array}\right)$$

Wieder als Gleichungssystem geschrieben ist die gesuchte Lösungsmenge ebenso die Lösungsmenge von

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 3 \\ x_3 &= 7/2 \,, \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen ergibt (alternativ auf die Form $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \end{array}\right)$ bringen und Lösungen ablesen)

$$x_2 = 3 - x_3 = 3 - \tfrac{7}{2} = -\tfrac{1}{2} \,,$$

$$x_1 = 1 - 2x_2 - x_3 = 1 - 2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{7}{2} = -\tfrac{3}{2} \,.$$

Eine Probe bestätigt das Ergebnis!

x_1, x_2, x_3 eindeutig bestimmt!?

(b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \lambda \end{array}\right) \underset{3^{te} - 2^{te} - 1^{te}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{array}\right)$$

Beobachtung: 3^{te}: $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = \lambda - 2$, d.h.:

Für $\lambda \neq 2$ existiert keine Lösung.

Sei nun $\lambda = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\frac{2^{te} - 1^{te}}{(-2)}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

faktisch weniger Gleichungen als Unbekannte, wohl keine Eindeutigkeit d. Lsg.

bzw. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}.$$

Man kann z.B. x_3 beliebig wählen, Schreibweise oft $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$.

Dann ist
$$x_1 = 1 - 2x_2 - x_3 = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

M.a.W.: Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $x_1 = 1-t,\ x_2 = 0,\ x_3 = t$ eine Lösung. (Probe!)

ii.) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1^k - 2^k}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 \end{array}\right)$$

2 Gleid. 4 Unbekannte

Hier können z.B. x_4 & x_3 beliebig gewählt werden, Schreibweise z.B. $x_4 = t,\ t \in \mathbb{R}$,
$x_3 = s,\ s \in \mathbb{R}$,

d.h.
$$x_2 = -1 - \frac{t}{2}, \quad \begin{aligned} x_1 &= -2x_2 - x_3 - x_4 \\ &= +2 + t - s - t \\ &= 2 - s. \end{aligned}$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $s \in \mathbb{R}$ ist (Probe!)

$x_1 = 2 - s,\ x_2 = -1 - \frac{t}{2},\ x_3 = s,\ x_4 = t$ eine Lösung.

Bemerkung: Man erreicht nicht immer Zeilenstufenform.

Beispiel.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_3 = 2.$$

Schema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Um formal auf Zeilenstufenform zu kommen, müssten die zweite und dritte Spalte vertauscht werden.

Vorsicht: Eine Vertauschung von Spalten entspricht einer Umnummerierung der gesuchten x_i.

Aber auch ohne formale Zeilenstufenform sieht man oben die Lösungen

$x_3 = 2$, $x_2 = t$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$,
$x_1 = -1 - t$.

Anhand der Zeilenstufenform erkennt man:

Satz 1. Man betrachte ein linearen Gleichungssystem, das durch elementare Zeilenumformungen auf die Zeilenstufenform (*) gebracht werden kann. Die Anzahl der Gleichungen n sei kleiner oder gleich der Anzahl der Unbekannten m, folglich $\underset{\text{Zeilenstufenform}}{r} \leq n \leq m$.

eigentlich im rang, bild, kein zu formulieren

Dann gilt:

i.) Ist $r = n$, so ist das System für alle rechten Seiten lösbar.

ii.) Ist $r < n$ und eine der Zahlen $\tilde{b}_{r+1}, \ldots, \tilde{b}_n$ ungleich Null, so ist das System nicht lösbar.
Bsp i), (b), $\lambda \neq 2$

iii.) Ist $r = n = m$, so hat man stets eine eindeutige Lösung. Bsp i), (a)

iv.) Ist $r < m$ und liegt nicht Fall ii.) vor, so können $m - r$ Parameter der Lösung frei gewählt werden. Bsp i), (b): $\lambda = 2$
Bsp ii.)

5.2 Vektoren im $\mathbb{R}^n$

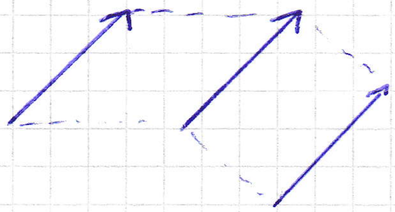
5.2.1 Was ist ein Vektor?

Im $\mathbb{R}^3$ anschaulich:

- Eine gerichtete Größe, die durch Länge und Richtung gekennzeichnet ist.

- Freie Vektoren, die durch Parallelverschiebungen ineinander überführt werden können, werden als gleich angesehen.

o.B.d.A.: ohne Beschränkung der Allgemeinheit



Ohne Einschränkung:

Anfangspunkt im Koordinatenursprung.

falls nicht, schiebe ihn dahin

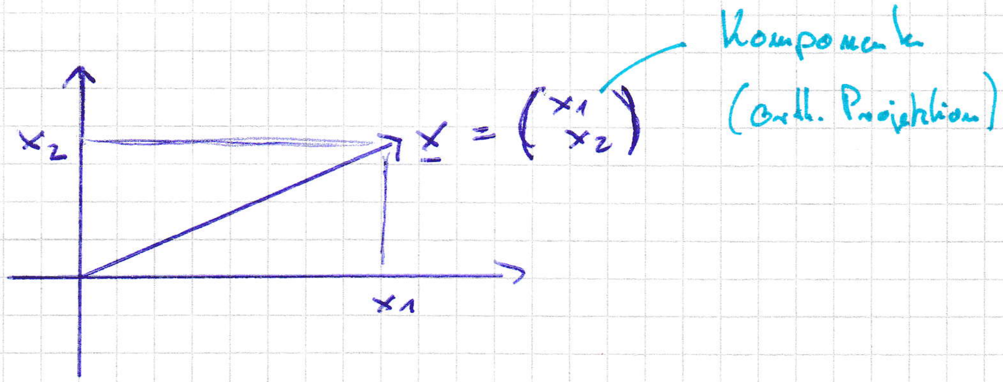
M.a.W.: Betr. das kartesische Produkt ⇝ Ortsvektor

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \ \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}$$

(vgl. Euklidisches Raum, Kap. 0)

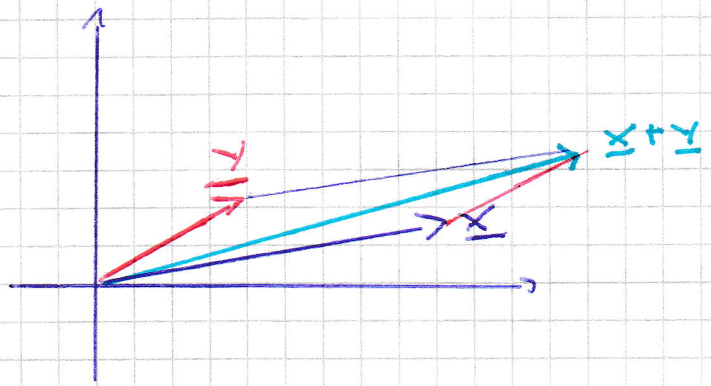
und schreibe ein Element als Spaltenvektor

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$



Addition von Vektoren

- mithilfe eines Kräfteparallelogramms



- bzw. rechnerisch (komponentenweise)

$$\underline{x}+\underline{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \quad -\underline{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix},$$

$$c \in \mathbb{R} \text{ fix.}: c\underline{x} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}, \qquad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die präzise Antwort lautet: Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraums.

Satz 2. Der $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Addition ist ein Vektorraum, d.h.

natürlich gibt es noch ganz andere Vektorräume wie z.B. Funktionenräume.

i.) $(\mathbb{R}^n, +)$ ist eine kommutative Gruppe (vgl. Kap. 2) ii.) Es ist eine "Multiplikation" zwischen Elementen aus $\mathbb{R}$ und Elementen aus $\mathbb{R}^n$ definiert $(a \cdot \underline{x},\ a \in \mathbb{R},\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n)$, sodass die Assoziativ- und Distributivgesetze gelten $(a, b \in \mathbb{R},\ \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n)$

unterschiedliche "·" Zeichen

- $(ab)\underline{x} = a(b\underline{x})$
- $(a+b)\underline{x} = (a\underline{x}) + (b\underline{x})$

unterschiedliche "+" Zeichen

- $a(\underline{x}+\underline{y}) = (a\underline{x}) + (a\underline{y})$

Spielregeln zwischen Vektoren und reellen Zahlen

5.2.2 Lineare Unabhängigkeit, Dimension und Basis eines Vektorraums

Aus welchen "Bausteinen" kann der $\mathbb{R}^n$ aufgebaut werden?

Bet. dazu im $\mathbb{R}^n$ die n-Vektoren

$$\underline{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \underline{e}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E} = (\underline{e}^{(1)}, \ldots, \underline{e}^{(n)})$ heißt die kanonische Basis oder die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

$\underline{v}^{(i)}$ s nicht notw. lin. unabh.

Beobachtung.

(*) Notation. Sind $\underline{v}^{(1)},\dots,\underline{v}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, so heißt $\text{Spann}(\underline{v}^{(1)},\dots,\underline{v}^{(k)}) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \underline{v}^{(j)}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R}\}$ die lineare Hülle von $\underline{v}^{(1)},\dots,\underline{v}^{(k)}$.

Die Menge aller Linearkomb.

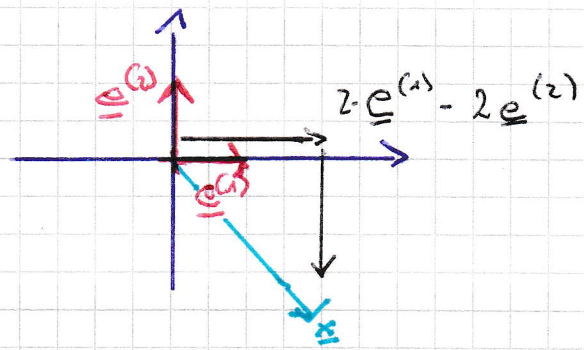
i.) Jeder Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ kann geschrieben werden als

$$\underline{x} \underset{\text{Def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \underline{e}^{(1)} + x_2 \underline{e}^{(2)} + \dots + x_n \underline{e}^{(n)},$$

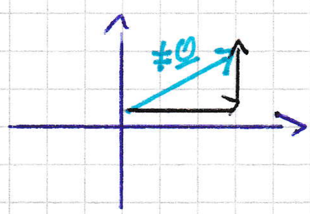
die x_i heißen die Koordinaten des Vektors bzgl. der kanonischen Basis. Sie sind eindeutig bestimmt.

Mit anderen Worten: Jeder Vektor des $\mathbb{R}^n$ ist eine Linearkombination der $\underline{e}^{(i)}$. (*) s.o.

Anschauliche Interpretation: "Man geht ein Stück x_1 in $\underline{e}^{(1)}$-Richtung, dann x_2 in $\underline{e}^{(2)}$-Richtung ... und kommt schließlich nach $\underline{x}$."



ii.) Anders ausgedrückt: "Geht man ein Stück in $\underline{e}^{(1)}$-Richtung, ein Stück in $\underline{e}^{(2)}$-Richtung ...", so kommt man nie wieder zum Ursprung (der $\underline{0}$) zurück:



Die $\underline{e}^{(i)}$ heißen linear unabhängig.

5.16

Definition 1. Die Vektoren $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \dots \underline{v}^{(k)}$ im $\mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, falls aus

$$\lambda_1 \underline{v}^{(1)} + \lambda_2 \underline{v}^{(2)} + \dots \lambda_k \underline{v}^{(k)} = \underline{0} \text{ zwingend folgt}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

Sonst heißen sie linear abhängig.

Praktische Überprüfung.

Trage die Vektoren nach Kap 5.1.1 in ein Schema ein: als Spalten

$$\left(\underline{v}^{(1)} \dots \underline{v}^{(k)} \mid \underline{0} \right).$$

Bezeichnung egal

Ist nur $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ (oder $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$) Lösung, so sind die Vektoren linear unabhängig, sonst linear abhängig.

Die Rechnung ist also nichts anderes als die Lösung eines linearen Gleichungssystems

Beispiele

i) Bsp. im $\mathbb{R}^2$: $\underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 Unbekannte x_1, x_2, x_3 bzw. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ← wird hier als Schreibweise bevorzugt, da x_i meist Koord. bzgl. kan. Basis

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{2^k - 2 \cdot 1^k}{\leadsto} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

$\lambda_3 = t$, $\lambda_2 = \frac{t}{2}$, $\lambda_1 = -\frac{t}{2}$ ist Lösung: linear abh.

Denn: Andere Lösungen als $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ existieren

S.17

ii.) Bsp. im $\mathbb{R}^3$: $\underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 Unbekannte λ_1, λ_2 $\leftrightarrow$ 2 Vektoren

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$\Rightarrow \lambda_2 = 0, \ \lambda_1 = 0$, linear unabhängig.

iii.) Bsp. im $\mathbb{R}^3$: $\underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ist bereits in Zeilenstufenform, „linear unabhängig" ist offen sichtlich.

Mit welchen linear unabhängigen Vektoren erreicht man (als Linearkombination) alle Punkte?

Definition 2.

i.) Die maximale Zahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraums V heißt die Dimension von V, $\dim V$.

Es ist $\dim \mathbb{R}^n = n$.

ii.) Ist $\dim V = n$ (bzw. $V = \mathbb{R}^n$), so heißt jedes n-Tupel $(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \dots \underline{v}^{(n)})$ von linear unabh. Vektoren eine Basis von V.

Beispiele i.) Die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.

ii.) $(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)})$ aus obigen Bsp. iv.) ist keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

iii.) $(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)})$ aus obigen Bsp. iii.) ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Tatsächlich gilt für jede Basis $(\underline{v}^{(1)}, \dots \underline{v}^{(n)})$ des $\mathbb{R}^n$: Zu jedem $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ existieren eindeutig bestimmte Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\underline{v} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{v}^{(k)}.$$

Bsp. Betr. $\underline{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \underline{v}^{(3)})$ Basis des $\mathbb{R}^3$.

Dann gilt für jedes $\underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$:

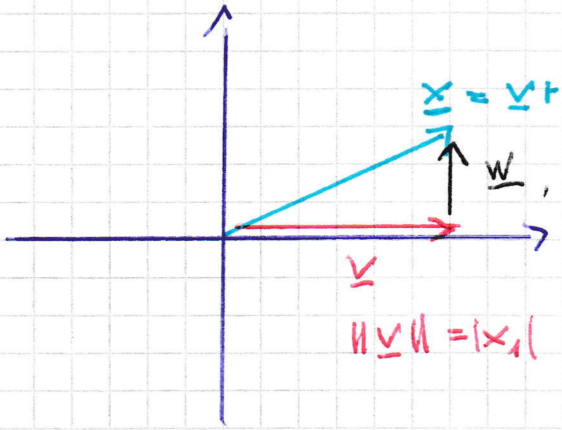
$$\underline{w} = (w_1 - w_2)\,\underline{v}^{(1)} + (w_2 - w_3)\,\underline{v}^{(2)} + w_3 \underline{v}^{(3)}$$

Probe bzw. lineares Gleichungssystem lösen

5.2.3 Längen und Winkel

Längen im $\mathbb{R}^n$ werden mit der Euklidischen Norm gemessen:

$$\|\underline{x}\| := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{für alle } \underline{x} \in \mathbb{R}^n.$$



Es gilt:

i.) $\|\underline{x}\| \geq 0$ und $[\|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}]$

Für $\underline{x} = \underline{0}$ ist die Länge eine positive Zahl

ii.) $\|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \, \|\underline{x}\| \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Wird ein Vektor gestreckt (gestaucht), so ändert sich die Länge um den entsprechenden Faktor

iii.) $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

Dreiecksungleichung

Zur Winkelmessung benötigt man das Euklidische Skalarprodukt

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Eigenschaften.

i.) $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$ (Kommutativgesetz)

ii.) $\langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$ (Distributivgesetz)

iii.) $\lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \lambda \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \lambda \underline{y} \rangle$ (Assoziativgesetz)

iv.) $\underline{x} \neq \underline{0} \Leftrightarrow \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle > 0$ (positive Definitheit)

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung. $|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|$

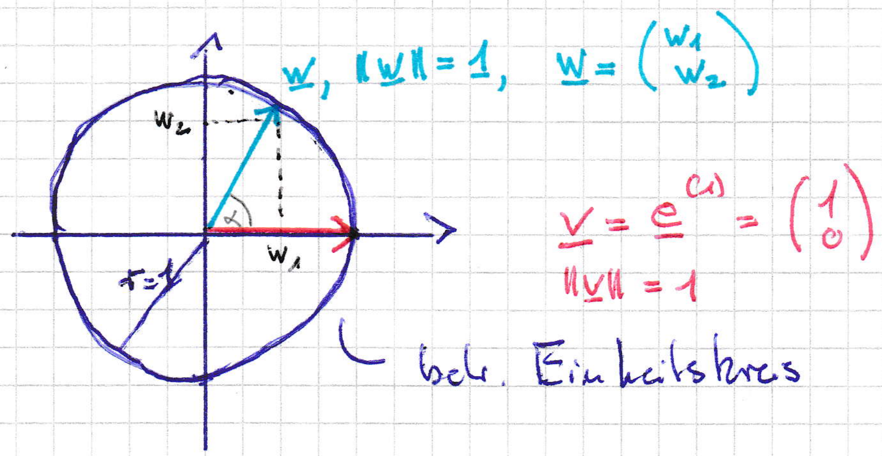
↳ impliziert direkt die Dreiecksungl.

Mit diesen Vorbereitungen definiert man den Kosinus zwischen zwei Vektoren

$$\cos(\underline{x}, \underline{y}) := \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\| \underline{x} \| \, \| \underline{y} \|} .$$

($-1 \leq \cos(x,y) \leq 1$ folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungl.).

Bsp.



Def. des cos am Einheitskreis (vgl. Schulmathematik)

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{„ Ankathete"}}{\text{„ Hypotenuse"}} = w_1$$

Obige Def.:

$$\frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{\| \underline{v} \| \, \| \underline{w} \|} = \frac{w_1}{1 \cdot 1} = w_1 .$$

Beobachtung. Die Definition stimmt mit der „aus der Schule bekannten" Definition überein, ist jedoch viel allgemeiner (hier direkt im $\mathbb{R}^n$ formuliert) und einfach zu berechnen.

nur ein Vektorraum und ein Skalarprodukt nötig

Mit dem Kosinus ist auch die Orthogonalität von Vektoren definiert:

$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ stehen senkrecht aufeinander, falls $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = 0$.

Beispiel. Die Vektoren der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ stehen paarweise senkrecht aufeinander.

Da sie zudem die Länge 1 haben, spricht man von einer Orthonormalbasis.

5.3 Matrizen

5.3.1 Definition und erste Eigenschaften

Eine Matrix ist einfach eine Tabelle aus Zahlen:

Definition 3 Es seien $n, m \in \mathbb{N}$.

Ein $n \times m$ Koeffizientenschema (Tabelle aus n Zeilen und m Spalten) der Form

$$(a_{ij})_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m} := A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, heißt $n \times m$ Matrix.

ite Zeile, jte Spalte

Notation: i.) Manchmal schreibt man einfach (a_{ij}).

ii.) Die Menge der $n \times m$ Matrizen wird mit $M(n,m)$ oder $\mathbb{R}^{(n,m)}$ oder $\mathbb{R}^{n \times m}$ bezeichnet.

Bekannte Beispiele.

i.) Ein Vektor $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M(n,1).$$

ii.) Das Schema im Gaußschen Eliminationsverfahren ist eine Matrixschreibweise (s.u.)

Einfache Rechenregeln. $(\lambda \in \mathbb{R},\ (a_{ij}), (b_{ij}) \in M(n,m))$

- $$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \vdots & & & \\ \lambda a_{n1} & \cdots & & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

- Addition wie im $\mathbb{R}^n$ komponentenweise
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ & & \vdots \\ b_{n1} & & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

Neu: Multiplikation von Matrizen.

Matrizen mit geeigneten Formaten können multipliziert werden:

Merkregel: $A \cdot B = C$ bedeutet für das Element aus der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von C:

„Multipliziere die i-te Zeile von A mit der j-ten Spalte von B."

Definition 4. Es seien $n, m, l \in \mathbb{N}$,

$$A \in M(n, \underbrace{m), \; B \in M(m}_{\substack{\text{Spaltenzahl von } A = \\ \text{Zeilenzahl von } B}}, l).$$

Dann ist $A \cdot B$ per definitionem die Matrix $C \in M(n, l)$ mit

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1 \ldots n, \; j = 1 \ldots l.$$

Schema.

$$\begin{array}{cc} & m \\ n & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} & l \\ m & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1l} \\ & & b_{2j} & & \\ \vdots & & & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{ml} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{cc} & l \\ n & \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & & & \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & & c_{il} \\ \vdots & & & & \\ c_{n1} & & c_{nj} & \cdots & c_{nl} \end{pmatrix} \end{array}$$

Beispiele.

i.) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(2,3)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3,4)$$

Es ist $AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$2\cdot 2 + 0\cdot 1 + 2(-1)$

$B \cdot A$ ist nicht definiert!

ii.) Ist $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(n,n)$, Einheitsmatrix.

$A \in M(n,n)$, so gilt

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

iii.) Ist $A \in M(n,m)$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^m = M(m,1)$

so ist $$A\underline{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = M(n,1)$$

iv.)

Dementsprechend betr. man ein lineares Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n.$$

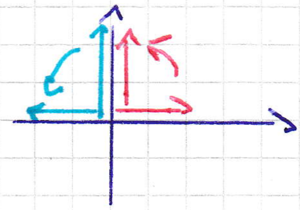
Mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,

kann dies geschrieben werden als

$$A \underline{x} = \underline{b}, \quad \text{gesucht } \underline{x} \in \mathbb{R}^m.$$

v.) Rotation im $\mathbb{R}^2$ (hier um 90°):

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2,2)$



$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und A, B, C Matrizen (jeweils derart, dass die folgenden Multiplikationen definiert seien). Dann gilt

Warum folgt ii.) nicht aus i.)?

i.) $(A+B)C = AC + BC$ (Distributivgesetz)

ii.) $A(B+C) = AB + AC$ (Distributivgesetz)

iii.) $A(BC) = (AB)C$ (Assoziativgesetz)

iv.) $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$

Vorsicht. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

In diesem Fall sind sowohl $A \cdot B$ und $B \cdot A$ definiert, es gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}$$

Die Matrizenmultiplikation hängt (auch wenn BA und AB definiert sind) von der Reihenfolge ab.

Zudem: Aus $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ folgt nicht $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ oder $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.3.2 Quadratische Matrizen

Alle Matrizen in diesem Abschnitt sind quadratisch, d.h.

Zeilenzahl = Spaltenzahl, $n = m$.

Es sei $A \in M(n,n)$. Eine Inverse zu A existiert per definition, falls es eine Matrix $A^{-1} \in M(n,n)$ gibt mit

muss nicht der Fall sein

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

Beispiel. Falls eine solche Inverse existiert, ist das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ für alle $\underline{b}$ eindeutig lösbar.

gs. gg.

Dann ist nämlich

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff \underbrace{A^{-1}A}_{=I_n}\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \iff \underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

und die gesuchte Lösung kann direkt hingeschrieben werden.

Wie A^{-1}, falls existiert, mit dem Gaußschen Eliminations-verfahren explizit berechnet wird, ist in den Übungen besprochen.

Hier nochmals als Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,2).\quad A^{-1}??$$

$a=0$: A^{-1} existiert nicht, falls $b=0$ oder $c=0$

N.R. $a=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$: $\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{d}{c} & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right)$

$\hat{=} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{d}{cb} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right) \rightarrow \underline{\underline{\text{s.u.}}} \begin{pmatrix} \frac{+d}{-cb} & \frac{-b}{-cb} \\ \frac{-c}{cb} & 0 \end{pmatrix}$

Bel.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{a\cdot 2^k \\ -c\cdot 1^k}}{\overset{a\neq 0}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$

sieht man an obiger Form

$b\neq 0$ ($b=0$ ✓)

$$\underset{\frac{(ad-bc)}{b}1^k - 2^k}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{a}{b}(ad-bc) & 0 & \frac{ad-\cancel{bc}}{b} + \frac{\cancel{cb}}{b} - a & \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} ad-bc & 0 & d & -b \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right) \underset{ad-bc\neq 0}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

Tatsächlich: Ist $ad-bc\neq 0$, so ist $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

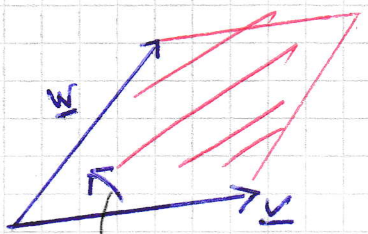
Ist $ad-bc=0$, so existiert A^{-1} nicht.

Probe!

Eng verwandt ist die Determinante einer Matrix

Betr. zunächst den Fall $n = 2$, die Matrix

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und die beiden Spaltenvektoren $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\underline{w} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.



det positiv, " ↻ " negativ.

- Der Betrag der Determinante von A gibt den Flächeninhalt des von $\underline{v}$ und $\underline{w}$ aufgespannten Parallelogramms an.

Insbesondere gilt $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \underline{v}, \underline{w}$ lin. unabh.

$\Leftrightarrow A$ invertierbar.

!

- Das Vorzeichen (plus oder minus) der Determinante gibt die Orientierung von $\underline{v}$ und $\underline{w}$ an.

Definition 5a.) Die Determinante einer 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

berechnet sich zu $\det A = ad - bc$.

Die Betrachtungen aus dem Fall $n=2$ lassen sich direkt auf den Fall $n \geq 3$ übertragen und man definiert rekursiv: 5.29

Definition 5.6.) Gegeben sei eine Matrix $A \in M(n,n)$.

Für $i,j = 1, \dots n$ wird aus A die Streichungsmatrix $A_{ij} \in M(n-1, n-1)$ konstruiert, indem die i^{te}-Zeile und die j^{te} Spalte gestrichen wird.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & \text{---} & a_{ij} & \text{---} & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann gilt der Laplacesche Entwicklungssatz:

- Entwicklung nach der i^{ten} Zeile:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

- Entwicklung nach der j^{ten} Spalte:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} .$$

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3,3)$

Dann ist (Entwicklung nach erster Zeile)

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 4 + 6 = 2$$

oder (Entwicklung nach zweiter Spalte)

$$\det A = -2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -4 + 2 + 4 = 2.$$

Bsp. $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(4,4),$

$$\det \tilde{A} = \det A.$$

Eigenschaften: i.) Vertauscht man zwei Spalten (oder Zeilen), so ändert sich das Vorzeichen.

ii.) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$

iii.) Im Allgemeinen:

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B$$

iv.) Aber: Determinantenmultiplikationssatz

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

v.) Ist A regulär (d.h. $\det A \neq 0$ oder äquivalent A^{-1} exist.),

so folgt $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.