7.1

Kap. 7. Funktionen II: Elementare Funktionen

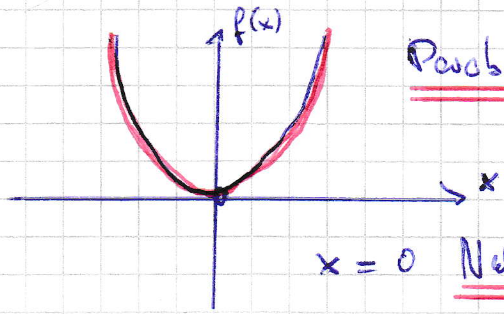
→ meist Wdh. Schulmath.

In diesem Kapitel sollen **elementare Funktionen** und deren **charakteristische Eigenschaften** kurz vorgestellt werden.

7.1 Potenzfunktionen und enge Verwandte

7.1.1. Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$



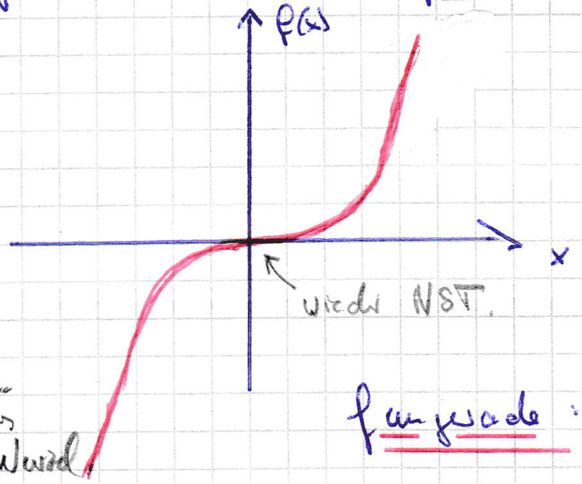
Parabel

$x = 0$ **Nullstelle**, d.h. $f(x) = 0$.

f ist **gerade**, d.h. $f(-x) = f(x)$.

analog: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ gerade.

(b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$



f bijektiv.

f ungerade: $f(-x) = -f(x)$

analog: $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$ ungerade.

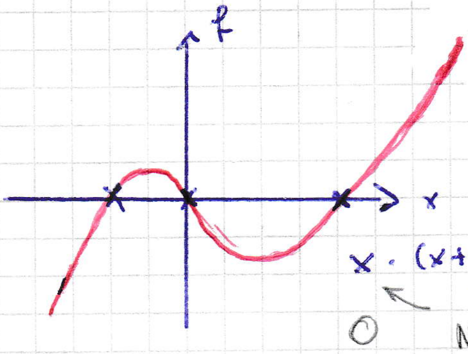
7.1.2 Polynome - Interpolationsaufgabe von Lagrange.

Polynom $\quad p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_1 x + a_0$

vgl. Kap. Polynome & Polynomdivision

$a_n \neq 0$: Grad n

$\leadsto$ maximal n Nullstellen



$x \cdot (x+1)\,(x-2)$

0 NST -1 +2 → Linearfaktoren vgl. wieder Kap. 4

Geg. Messreihe eines Experiments.

Beobachtung: Durch zwei Datenpaare kann man eine Gerade legen, durch drei ein Polynom vom Grad 2...

Interpolationsaufgabe von Lagrange

Gegeben seien zu $n \in \mathbb{N}$

$(n+1)$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, x_1, \dots x_n$
$(n+1)$ Werte $y_0, y_1, \dots y_n$

Gesucht: Polynom $p_n(x)$ vom Grad $\leq n$ mit

$$p_n(x_i) = y_i \quad \text{für alle } i = 0, 1, \dots n.$$

Satz 1. Es gibt genau ein solches Interpolationspolynom und es ist

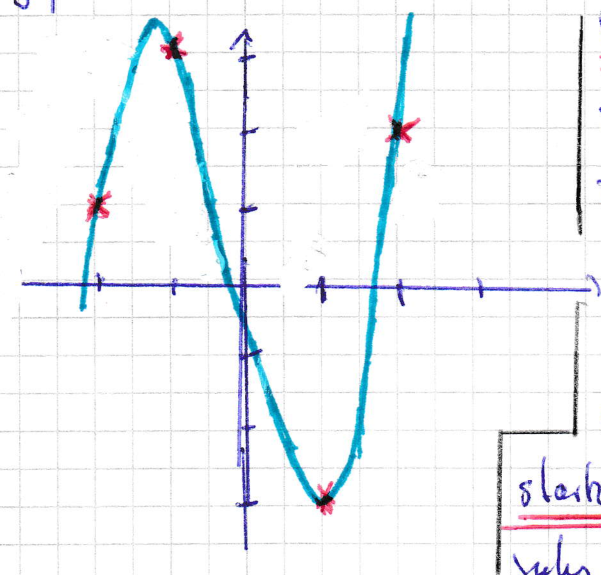
Beweis 1ter Schritt: Setze einfach x_i ein

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \underbrace{\left(\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right)}_{=: L_j(x)} .$$

Lagrange Polynome

Bsp.

j	0	1	2	3
x_j	-2	-1	1	2
y_j	1	3	-3	2



evtl. schon für kleinere n

Vorsicht: Man erkennt schon, dass für $\approx n \geq 10$ zu viele Datenpaare das Problem zwar noch immer gelöst werden kann, durch starke Oszillationen aber kein gutes Modell mehr ist.

Tabelle zu Lösung:

j	$L_j(x)$
0	$\dfrac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2-(-1))(-2-1)(-2-2)} = \left(-\dfrac{1}{12}\right)(x^3-2x^2-x+2)$
1	$\dfrac{(x+2)(x-1)(x-2)}{1\,(-2)(-3)} = \left(+\dfrac{1}{6}\right)(x^3-x^2-4x+4)$
2	$\dfrac{(x+2)(x+1)(x-2)}{3\cdot 2\cdot(-1)} = \left(-\dfrac{1}{6}\right)(x^3+x^2-4x-4)$
3	$\dfrac{(x+2)(x+1)(x-1)}{4\cdot 3\cdot 1} = \dfrac{1}{12}(x^3+2x^2-x-2)$

$$
\begin{aligned}
P_3(x) = {} & \underbrace{1}_{y_0}\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)(x^3-2x^2-x+2) \\
& \underbrace{+3}_{y_1}\cdot\frac{2}{12}(x^3-x^2-4x+4) \\
& \underbrace{-3}_{y_2}\left(-\frac{2}{12}\right)(x^3+x^2-4x-4) \\
& \underbrace{+2}_{y_3}\cdot\frac{1}{12}(x^3+2x^2-x-2) \\
= {} & \frac{1}{12}\left[13x^3+6x^2-48x-6\right].
\end{aligned}
$$

Man setze die Punkte ein, beachte: Lösung ist eindeutig

<u>Probe:</u> Tatsächlich Lösung der Interpolationsaufgabe.

<u>Bemerkung.</u> Es gibt weitere Berechnungsmöglichkeiten derselben Aufgabe:

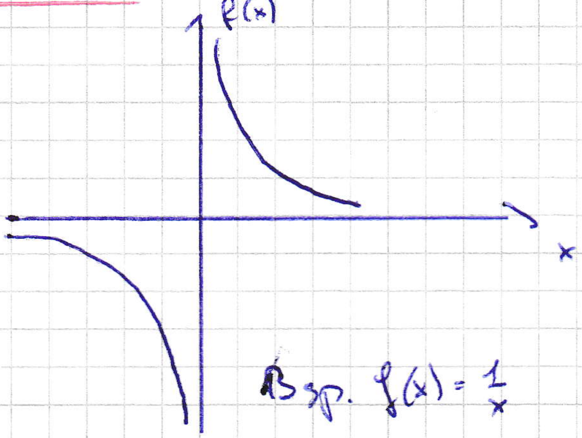
- <u>Dividierte Differenzen</u> ← numerische Vorteile bei Hinzunahme eines Datenpunktes
- <u>Algorithmus von Neville</u>

7.1.3 Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten – gebrochen rationale Funktionen

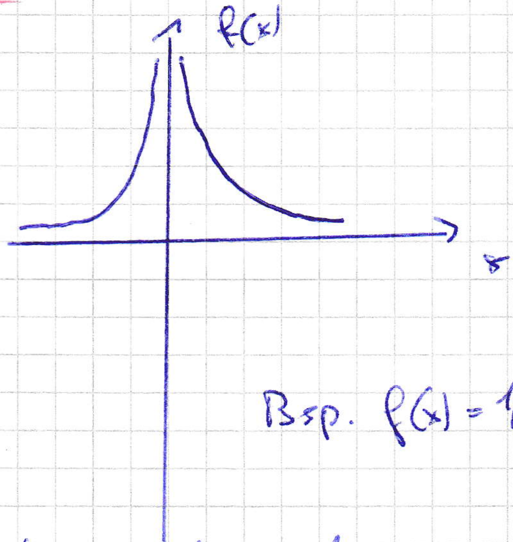
(a) Potenzfkt mit neg. Exponent

Betr. $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = x^{-n} := \frac{1}{x^n}$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.



Bsp. $f(x) = \frac{1}{x}$



Bsp. $f(x) = 1/x^2$

In 0 ist die Funktion nicht definiert, wird in der Nähe von 0 "beliebig groß": Polstelle.
im Sinne von $|f|$ wird größer als jede beliebige Konstante.

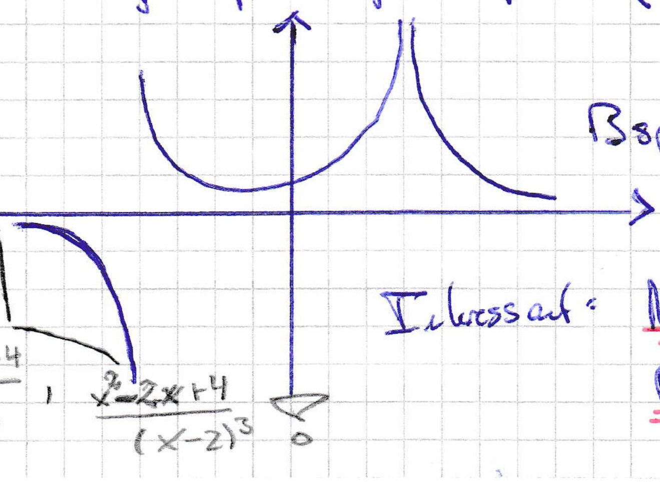
↑ Vgl. Präsenzübg. 6.

(b) Gebrochen-Rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p, q \text{ Polynome},$$

o.E. $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$ (→ Polynomdivision)

NST von q nicht unbedingt Polstellen: können gleichzeitig NST von p sein, Vielfachheiten beachten Bsp. $\frac{x^2-2x+4}{(x-2)}$, $\frac{x^2-2x+4}{(x-2)^3}$



Bsp. gebrochen rationale Fkt.

Interessant: Nullstellen von p und q
Polstellen (Vielfachheiten!)

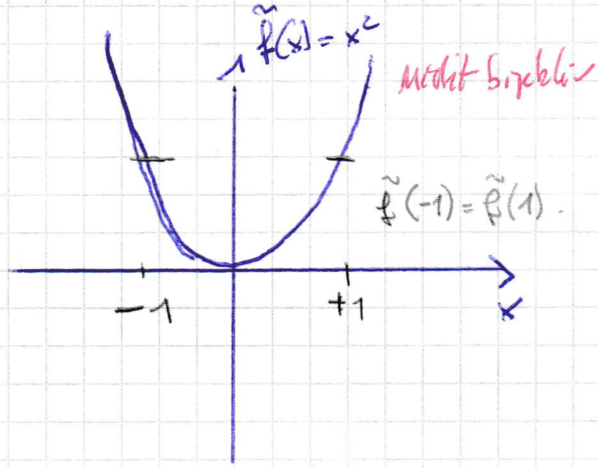
7.1.4 Wurzelfunktionen.

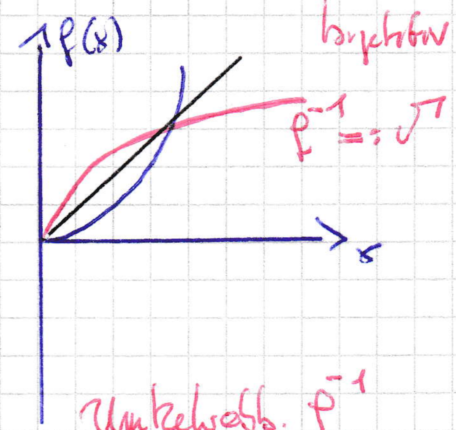
Der Definitionsbereich ist wesentlicher Bestandteil einer Funktion

(a) Quadratwurzel

Die Funktion $\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$

ist nicht bijektiv, $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$
ist bijektiv





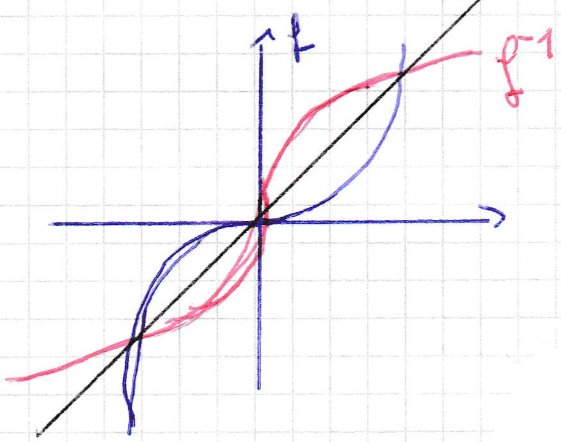
Umkehrabb. f^{-1} exist.: Spiegelung am Winkelhalbierenden

Definition Umkehrfunktion:

$$f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

$$\sqrt{x} := x^{1/2}$$

(b) 3te Wurzel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist bijektiv



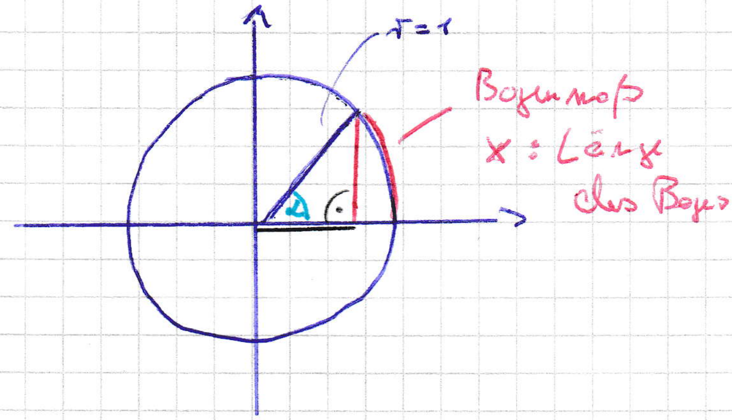
$$f^{-1}(x) =: \sqrt[3]{x} =: x^{1/3}.$$

(c) analog $\sqrt[n]{x} =: x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$

$\begin{cases} n \text{ gerade vgl. } x^{1/2} \\ n \text{ ungerade vgl. } x^{1/3}. \end{cases}$

7.2 Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen, deren Diskussion über den Einheitskreis und das Skalarprodukt ist im Kap. 5 erfolgt.



Kosinus: $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{"Ankathete"}}{\text{"Hypotenuse"}}$

Sinus: $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{"Gegenkathete"}}{\text{"Hypotenuse"}}$

(Reihendarstellung: Siehe Kap. 8)

Bogenmaß

$$x = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi$$

↑ Hier in der Regel Bogenmaß statt Winkel ⇝ Reihendarstellung auch bei sin, cos

Tangens: $\tan(x)$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

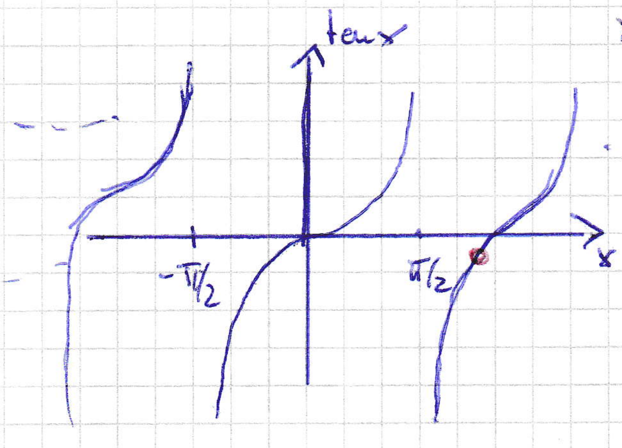
$$x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

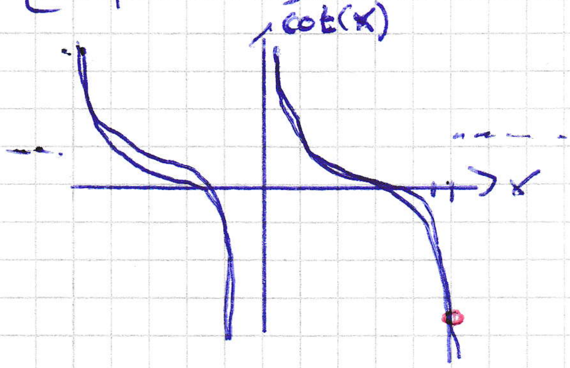
$NST_{\cos}$ $\ldots -\pi/2, \pi/2, 3/2\pi, 5/2\pi,$

Kotangens: $\cot(x)$

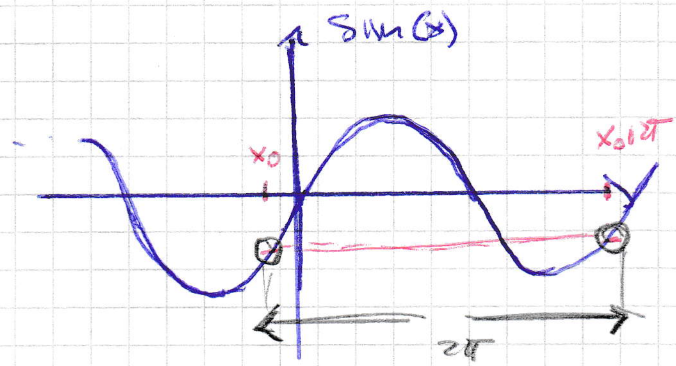
$$\cot(x) = \frac{1}{\tan x}$$

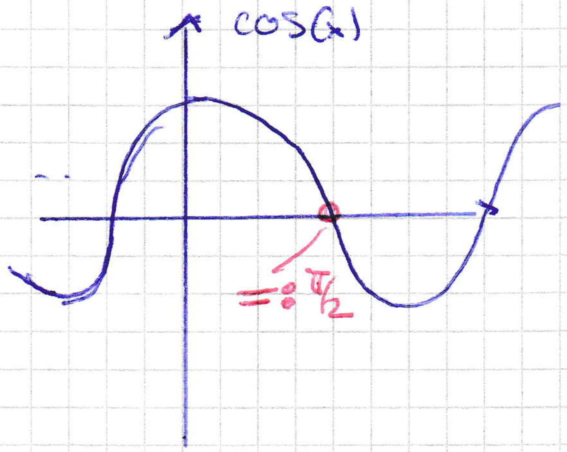
$$x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$ NST sin





Eigenschaften Sinus, Kosinus:





Bem.: $\pi/2$ definiert als erste NST des Kosinus

sin, cos periodisch mit Periode 2π.

Dabei: f heißt periodisch mit Periode $T>0$, ($\mathbb{R}\to\mathbb{R}$)

falls $\forall x\in\mathbb{R}$ gilt $f(x+T)=f(x)$

Satz des Pythagoras (vgl. Einheitskreis)

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

Additionstheoreme:

$$\sin(x\pm y)=\sin(x)\cos(y)\pm\cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x\pm y)=\cos(x)\cos(y)\mp\sin(x)\sin(y)$$

setze $x=y$

$$2\sin(x)\cos(x)=\sin(2x)$$

Bsp. $\sin(x+\pi/2)=\ldots$

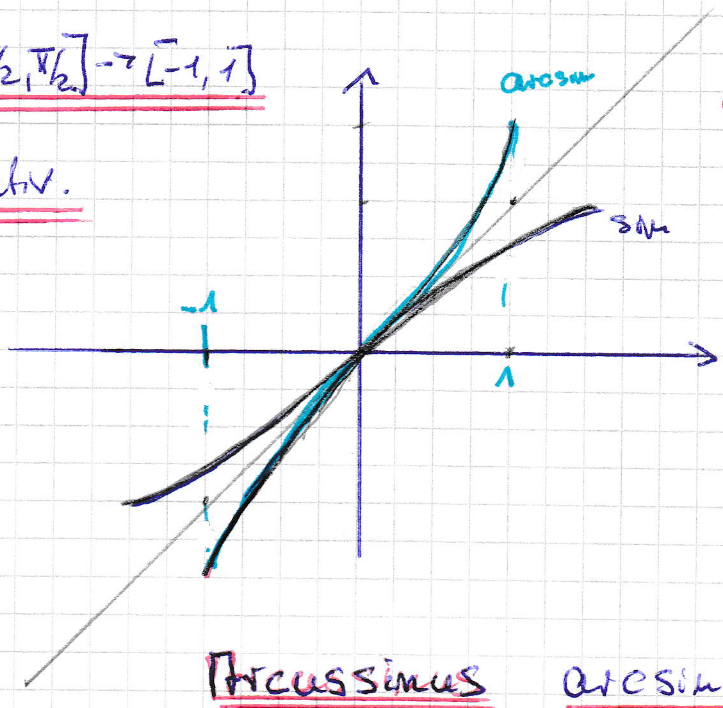
Weitere Eigenschaften, Spezialfälle $\rightsquigarrow$ Literatur

↳ folgt aus obigem

Beobachtung: $\sin: \mathbb{R} \to [-1,1]$ nicht bijektiv

aber: $\sin: [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$

ist bijektiv.



Umkehr fkt. existiert

Arcussinus $\arcsin: [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$

per def $\arcsin(\sin(x)) = x$

Analog Arcuskosinus $\arccos: [-1,1] \to [0,\pi]$.