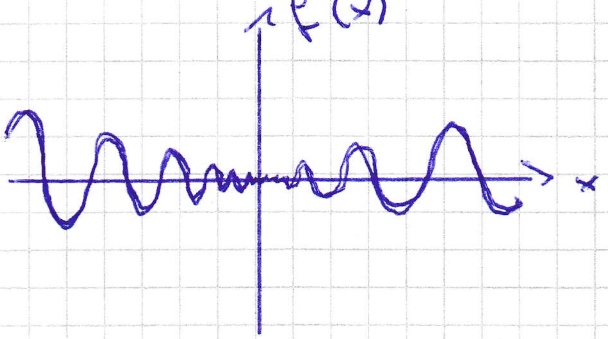
Kap. 8 Differentialrechnung

8.1 Stetige Funktionen

Motivation hierfür ist eigentlich der Zwischenwertsatz. Übg. Nachschlagen.

Man liest oft: "Stetige Funktionen können ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden." | zur Erinnerung

Beispiel.

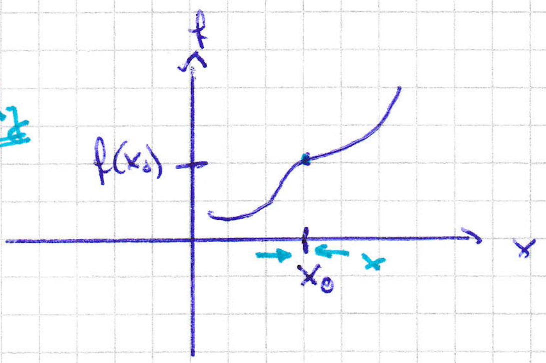


$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

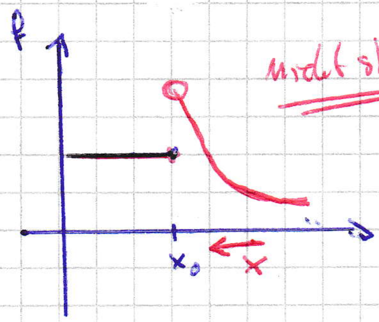
Offensichtlich versagt die obige Faustregel in diesem Beispiel!

Idee der Stetigkeit: Betr. $f: \underbrace{\mathbb{R}}_{I \subset} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ fix.

stetig



nicht stetig



Wenn man sich im Definitionsbereich wie auch immer dem Punkt x_0 nähert, nähern sich die Funktionswerte $f(x_0)$. (stetiges Fkt)

Situation: Betr. beliebige Folge $\{x_n\}$, $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0$ (formal $x_n \neq x_0$)

Dann ist $\{f(x_n)\}$ auch eine Folge.

Falls die Folge $\{f(x_n)\}$ für alle $\{x_n\}$ wie oben konvergiert und der Grenzwert für alle $\{x_n\}$ (von $\{f(x_n)\}$) gleich ist, heißt dieser der Grenzwert der Funktion bei $x \to x_0$.

Notation: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, so heißt f

Grenzwert gleich Funktionswert

stetig in x_0.

Beispiele: Polynome, exp, sin, cos ..., ... gebrochen rat. Funktionen in ihrem Definitionsbereich, $|x|$, Produkt, Summe ... von stetigen Funktionen, auch das einführende Bsp. ist stetig.

Nicht stetig: Sprungfunktionen, oder: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

oder $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

9.2. Differenzierbare Funktionen

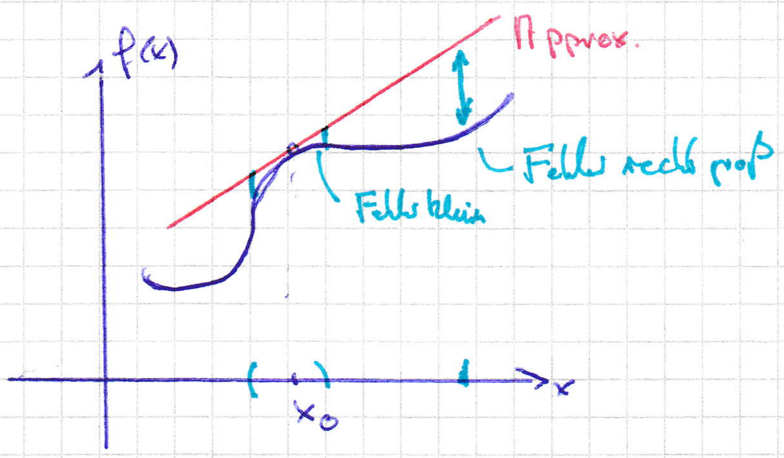
9.2.1. Idee und Definition

auch viele Anwendungsprobl.

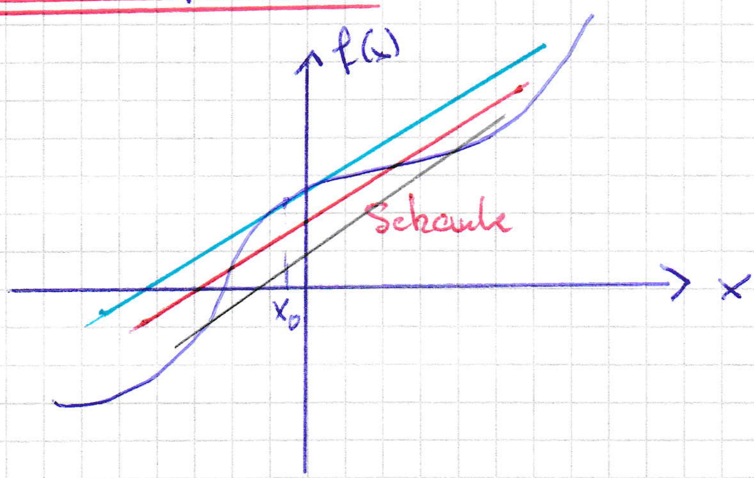
Problem. Die „mathematisch-funktionalen" Zusammenhänge sind oft zu kompliziert (oder implizit definiert...), um explizit rechnen zu können.

Idee: Im einfachsten Fall approximiert man eine Funktion (affin) linear, d.h. man "legt möglichst gut" eine Gerade an die Funktion, mit der man recht einfach rechnen kann.
d.h. an den Graphen

Hoffnung: Innerhalb eines gewissen Bereiches um den betrachteten Aufpunkt der Approximation bleibt der entstandene Fehler klein.



Geometrische Interpretation



Sekanten gehen im Grenzwert über in die Tangente an den Graphen von f im Punkt x_0

Kinematische Interpretation Die Durchschnittsgeschwindigkeit geht über in die Momentangeschwindigkeit.

Definition 1 (Ableitung)

Sei. $f: \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

f heißt differenzierbar im Punkt $x_0 \in I$, falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Differenzenquotient}} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Notation: $f'(x_0)$, $\frac{d}{dx} f(x_0)$

Bemerkung.

Beweis: Übung

i.) f diff'bar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0

ii.) f stetig in $x_0 \not\Rightarrow f$ diff'bar in x_0

Gegenbeispiel: $x_0 = 0$, $f(x) = |x|$.

9.2.2 Regeln und Beispiele.

Offensichtlich $(c \in \mathbb{R})$ $\quad (c \cdot f)' = c \cdot f'$

Konstante

$(f + g)' = f' + g'$

95

Produktregel. $(f\cdot g)' = f'g + f\cdot g'$

Quotientenregel $(g(x_0)\neq 0)$. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Kettenregel. $(g\circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{\text{"äußere" Ableitung}}\ \underbrace{f'(x)}_{\text{"innere" Ableitung}}.$

Beispiele (siehe auch Tabelle (Anhang Kap 9) mit Ableitungen bekannter Fkt.)

i.) Es sei $f(x) = x^n$, $n\in\mathbb{N}$ fix. Dann ist $f'(x) = n x^{n-1}$.

Bew. Vollst. Induktion.

Übung

- Induktionsanfang: $n=1$.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1.$$

D.h. $f(x) = x^1$ ist diff'bar mit $f'(x) = 1\cdot x^{1-1} = 1$. $\forall x.$

- Induktionsschluss "$A(n) \Rightarrow A(n+1)$"

Induktionsannahme: x^n diff'bar, Ableitung $n x^{n-1}$.

bch. $f = x^{n+1}$

$$f'(x) = (x^{n+1})' = (x^n\cdot x)' \overset{\text{Produktregel}}{=} (x^n)'\cdot x + x^n\cdot x'$$

$$\underset{\text{Ind. Ann.}}{=} n x^{n-1}\cdot x + x^n\cdot 1 = (n+1)\,x^n. \qquad \square$$

ii.) $f(x) = \tan(x), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

↑ Quotientenkriterium

$$= \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

iii.) $f(x) = \sqrt{1+x^2} = g_1 \circ g_2$ mit

$g_1(y) = \sqrt{y}, \quad g_2(x) = 1+x^2.$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

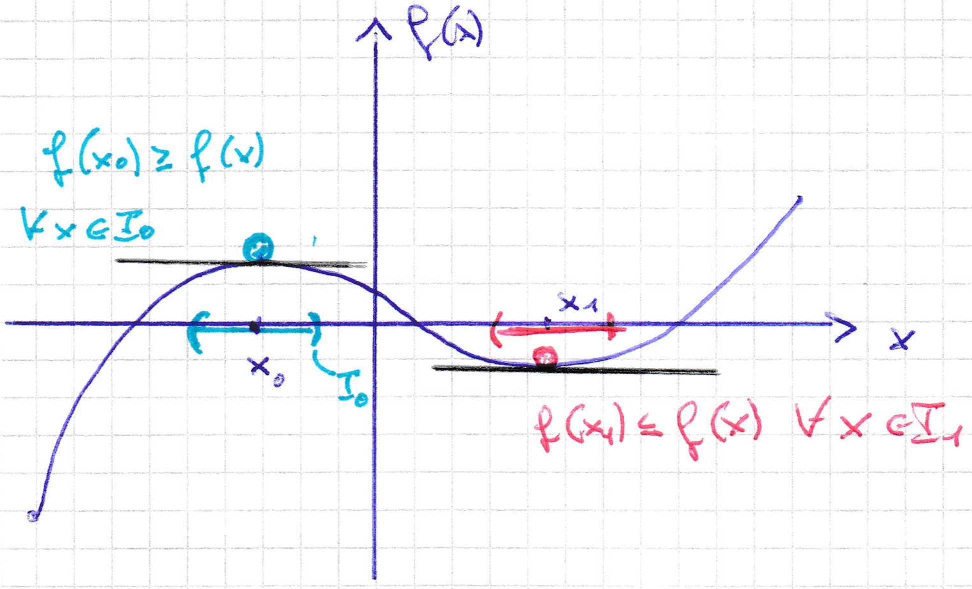
↑ bekannte Abl. → Tabelle

9.2.3 Extremwerte

Extremwerte sind (lokal) maximale oder minimale Funktionswerte (Maximum bzw. Minimum eines Funktion).

Punkte, in denen diese angenommen werden, heißen (lokale) Maximierer oder Minimierer.

(Maximal - Minimalstellen)



Falls eine Extremalstelle vorliegt (Maximal- oder Minimalstelle), hat f dort eine horizontale Tangente:

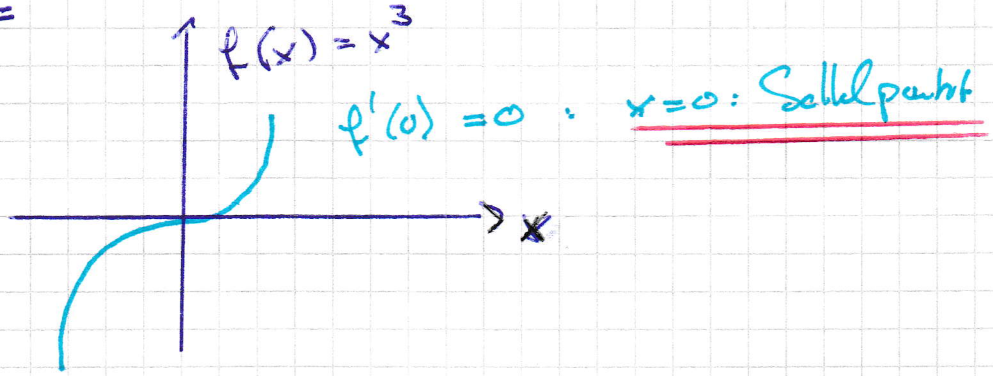
genauer die Gerade

kritischer Punkt

x Extremalstelle $\Rightarrow f'(x) = 0$ als notwendige Bed.

$f'(x) = 0$ impliziert aber nicht, dass x Extremalstelle ist.

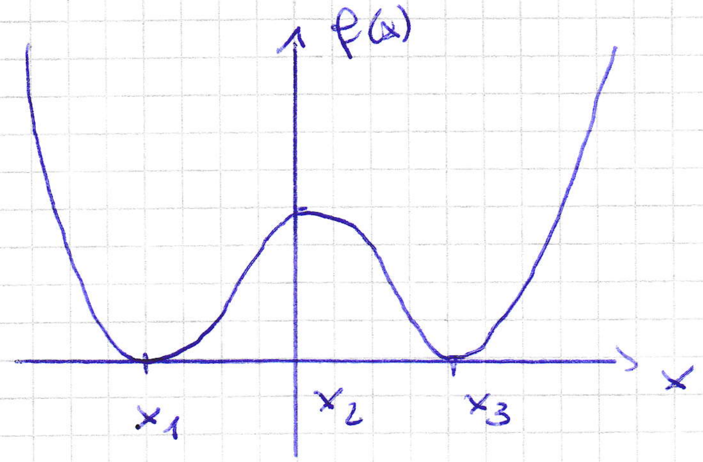
Bsp.



Bsp. $f(x) = (1-x^2)^2$

$$f'(x) = 2(1-x^2)(-2x) = -4x(1-x^2)$$

$f'(x) = 0$: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.



Der Funktion sieht man direkt an, dass in x_1, x_3 Minima vorliegen ($f(x_1) = f(x_3) = 0$, $f(x) \geq 0 \ \forall x$).

Falls das nicht so offensichtlich ist:

Ist $f: I \to \mathbb{R}$ $\forall x \in I$ diff'bar, so betrachte die Funktion $f': I \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto f'(x)$.

Diese ist evtl. selbst diff'bar mit zweiter Ableitung $f''(x)$ $\forall x \in I$. ⇝ dritte Ableitung
analog höhere Ableitungen

Zweite Ableitung: Information über die Krümmung.

Es gilt:

kritischer Punkt — lokal streng konvex

Ist $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, so hat f ein (strenges lokales) Min.

$f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$, so hat f ein (strenges lokales) Max.

(hinreichende Bedingung)

Im obigen Beispiel:

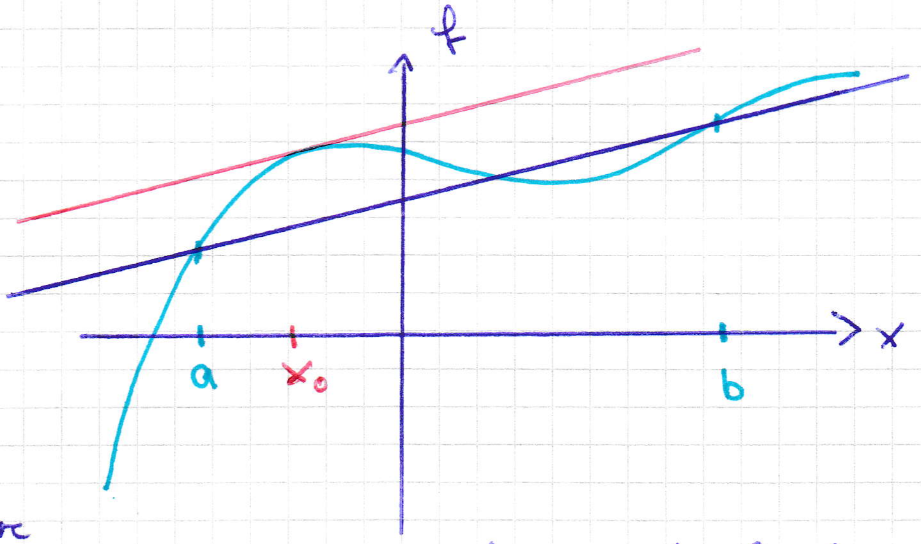
$$f'(x) = -4x(1-x^2)$$

$$f''(x) = -4 + 12x^2 \quad , \quad \left.\begin{array}{l} f''(\underbrace{x_1}_{=-1}) > 0 \\ f''(\underbrace{x_3}_{=1}) > 0 \end{array}\right\} \text{Min.}$$

$$f''(\underbrace{x_2}_{=0}) < 0 \quad \text{Max.}$$

§2.4 Der Mittelwertsatz und Anwendungen.

Idee.



Betr. eine diff'bare Fkt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Sekante durch $(a, f(a))$ & $(b, f(b))$.

Dann existiert ein $x_0 \in (a,b)$, sodass die Steigung der Tangente in x_0 gleich die Steigung dieser Sekante ist:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Anwendung z.B.

→ Übung: Monotonieverhalten versus Vorzeichen der Ableitung

(1) i.) $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist konstant

ii.) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ mo. wa.

(analog: $\leq$ ... mo. fa.)

Umkehrung gilt nicht, Bsp. $f(x) = x^3$.

iii.) $f' > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ streng mo. wa.

(analog $<$ ... streng mo. fa.)

(2) **Regeln von L'Hospital** → es gelten weitere, ähnliche Varianten, man kann die Regel auch "iteriert" anwenden:

$f,g: (a,b) \to \mathbb{R}$ diff'bar, $x_0 \in (a,b)$.

Ist $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$

und existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

↑ existiert also, obwohl dies zunächst völlig unklar ist

Bsp.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

vgl. Reihe cos

Bekanntestes Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

9.3 Abschließende Bemerkung: Taylor-Entwicklung.

Setzt man für den Differenzenquotient "nahe bei x_0"

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \approx f'(x_0),$$

so hat man als Approximation

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Für $x_0=0$ und ein Polynom $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

hat man $\left(f(x_0=0) = a_0,\ f'(x_0=0) = a_1\right)$

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x$$

Idee: Höhere Ableitungen liefern evtl. bessere Approximation.

Approx. 2ter Ordnung am Bsp. des Polynoms

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = a_0 + f'(\underset{x_0=0}{0})(x-0) + \frac{1}{2} f''(\underset{x_0=0}{x_0})(x-0)^2$$

$f''(0) = 2a_2$

Allg. Taylor-Entwicklung einer Funktion f um den

Entwicklungspunkt x_0, Ordnung $n \in \mathbb{N}$:

Taylor-Polynom von f

$$T_n f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

der Ordnung n

um x_0

S. 12

$f^{(k)}$: k-te Ableitung, $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, $0! = 1$.

<u>Bsp.</u> $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$, $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x)$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x)$, $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x)$, $f'''(0) = -1$

$$T_3 f(x, 0) = x - \underbrace{\frac{1}{3!}}_{1/6} x^3$$ (vgl. Reihendarstellung sin).

Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Mathematik für Studierende Biologie und des Lehramtes Chemie

Wintersemester 2018/2019

Die Ableitungen einiger bekannter Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	Def. Bereich	Bem.
x^k	kx^{k-1}	$\mathbb{R},\quad x \neq 0$ für $k < 0$	$k \in \mathbb{Z}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+$	vgl. x^α
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^+$	$\alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$	
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$	
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	