UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Daniel Kraemer

Höhere Mathematik für Ingenieure II

Präsenzübung (Bachelor PLUS MINT)

Blatt 11 (Fr. 29.06.2018) Abgabetermin:

Aufgabe 1

Gegeben Sei die Funktion

$$f\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{x\tan(x)}{1-\cos(x)}$$

(a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass f eine gerade Funktion ist.

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)x}{\sin(x)}$$

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe wollen wir das Integral

$$\int_0^1 x^2 dx$$

nur mit Hilfe der Definition des Riemann-Integrals berechnen.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass für die durch

$$x_j = \frac{j}{n}, \quad j = 0, \ldots, n$$

gegebene Zerlegung $Z_n = \{0 = x_0 < \ldots < x_n = 1\}$ von $[0,1]$ gilt:

$$\underline{S}_{Z_n}(f) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \quad \text{und} \quad \overline{S}_{Z_n}(f) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

(Hinweis : $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.*)*

(b) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \overline{S}_{Z_n}(f) - \underline{S}_{Z_n}(f) = 0$, folgern Sie, dass f Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie

$$\int_0^1 x^2 dx.$$
