Fachrichtung Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Daniel Kraemer

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II, Blatt 11
Sommersemester 2018

Aufgabe 1. (2.5+1.5+2 Punkte)

i) Berechnen Sie – falls existent – die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh^2(x)-1}{\sin^2(x)}\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{e^x-1}\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x \sin(x)}\,, \quad \lim_{x\to 2} \frac{\cosh^2(x)-1}{\sinh^2(x)}\,.$$

ii) Berechnen Sie – falls existent – die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} x^x\,, \quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}\,.$$

iii) Berechnen Sie – falls existent – die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x}\right], \quad \lim_{x\to 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right].$$

Aufgabe 2. (2+3 Punkte) Es sei $f(x) = \ln(1+x)$, $n = 2$, $h_0 = 1/8$, $h_1 = 1/16$, $h_2 = 1/32$. Berechnen Sie einen Näherungswert ("Extrapolation zum Limes $h \to 0$", 8 Nachkommastellen) für $f'(0)$

i) mittels des Differenzenquotienten;

ii) mittels des zentralen Differenzenquotienten (als Polynom in h_i^2).

Aufgabe 3. (2+2+1+1 Punkte) Eine Zerlegung $\mathcal{Z}^*$ von I heißt *Verfeinerung der Zerlegung* $\mathcal{Z}$ von I, falls alle Teilpunkte von $\mathcal{Z}$ auch Teilpunkte von $\mathcal{Z}^*$ sind.

Zeigen Sie:

i) Ist $\mathcal{Z}^*$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$, so folgt

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \le \underline{S}_{\mathcal{Z}^*}(f) \le \overline{S}_{\mathcal{Z}^*}(f) \le \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f)\,.$$

Bitte wenden.

ii) Für zwei beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ von I gilt

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}_1}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}_2}(f) \; .$$

iii) Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von I ist

$$|I| \inf_I f \leq \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq |I| \sup_I f \; .$$

iv) Für eine beliebige Zerlegung $\mathcal{Z}$ von I gilt

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \underline{\mathcal{I}}(f) \leq \overline{\mathcal{I}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \; .$$

Aufgabe 4. (3 Punkte) Es sei $I = [0,1]$. Gibt es eine beschränkte Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, die nicht von der Klasse $\mathcal{R}(I)$ ist?

Abgabe: Bis Donnerstag, 28.06.2018, 10.10 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/HMI2/hmi2.html