Fachrichtung Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Daniel Kraemer

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II, Blatt 2
Sommersemester 2018

Aufgabe 1. (2+2+(2+2) Punkte)

i) Zeigen Sie für $A \in M(n,m)$, $B \in M(m,l)$, n, m, $l \in \mathbb{N}$,

$$(AB)^T = B^T A^T \, .$$

ii) Eine Matrix $B \in M(m,l)$, $m, l \in \mathbb{N}$, kann als Tupel von Spaltenvektoren geschrieben werden:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ml} \end{pmatrix} = (\underline{\mathbf{b}}^{(1)} \; \underline{\mathbf{b}}^{(2)} \; \dots \; \underline{\mathbf{b}}^{(l)}) \, ,$$

wobei für alle $i = 1, \dots, l$ gesetzt ist:

$$\underline{\mathbf{b}}^{(i)} = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \, .$$

Zeigen Sie für $A \in M(n,m)$:

$$AB = (A\underline{\mathbf{b}}^{(1)} \; A\underline{\mathbf{b}}^{(2)} \; \dots \; A\underline{\mathbf{b}}^{(l)}) \in M(n,l) \, .$$

iii) Eine Matrix $B \in M(n,m)$ kann auch in der Form ($\tilde{\underline{\mathbf{b}}}^{(i)} \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, n$)

$$B = \begin{pmatrix} (\tilde{\underline{\mathbf{b}}}^{(1)})^T \\ (\tilde{\underline{\mathbf{b}}}^{(2)})^T \\ \vdots \\ (\tilde{\underline{\mathbf{b}}}^{(n)})^T \end{pmatrix}$$

mit Zeilenvektoren

$$(\tilde{\underline{\mathbf{b}}}^{(i)})^T = (\tilde{b}_{i1} \; \tilde{b}_{i2} \; \dots \; \tilde{b}_{im}) \, ,$$

$i = 1, \dots, n$, geschrieben werden.

Bitte wenden.

Bestimmen Sie, **ohne die Eigenschaft "Zeilenrang = Spaltenrang" zu zitieren**, die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren und die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2. (2+2 Punkte)

i) Es seien $A \in M(n_1, n_2)$, $B \in M(n_3, n_4)$ und $C \in M(n_5, n_6)$. Unter welchen Bedingungen an die $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, 6$, ist das Matrizenprodukt $B^T C A^T$ definiert? Welche Zeilen- und Spaltenzahl hat diese Matrix?

ii) Gibt es eine Matrix $A \in M(2, 3)$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe 3. (4 Punkte) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, $A \in M(n, m)$ und $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$. Weiter sei (für ein $k \leq m$) $(\underline{\mathbf{x}}^{(1)}, \underline{\mathbf{x}}^{(2)}, \ldots, \underline{\mathbf{x}}^{(k)})$ eine Basis von kern A.

Mit $\underline{\mathbf{y}}_s^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{y}}_s^{(2)}$ seien zwei spezielle Lösungen des inhomogenen Systems $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ bezeichnet (falls existent) und es seien

$$\begin{aligned} L_1 &:= \Big\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m : \ \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}}_s^{(1)} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \underline{\mathbf{x}}^{(j)}, \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \ldots k \Big\} , \\ L_2 &:= \Big\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m : \ \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}}_s^{(2)} + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \underline{\mathbf{x}}^{(j)}, \ \mu_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, \ldots k \Big\} . \end{aligned}$$

Zeigen Sie: $L_1 = L_2$.

Aufgabe 4. (4 Punkte) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens ($\lambda \in \mathbb{R}$ fixiert).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} .$$

Was ist jeweils die Dimension des Kerns?

Abgabe: Bis Donnerstag, 26.04.2018, 10.10 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/HMI2/hmi2.html