Fachrichtung Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Daniel Kraemer

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II, Blatt 5
Sommersemester 2018

Aufgabe 1. (2+3 Punkte) Es sei L eine lineare Abbildung vom $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$.

i) Ist es möglich, dass zwei linear abhängige Vektoren $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$ auf zwei linear unabhängige Vektoren $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ abgebildet werden?

ii) Ist es möglich, dass zwei linear unabhängige Vektoren $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$ auf zwei linear abhängige Vektoren $\underline{\mathbf{u}}$, $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ abgebildet werden? Wenn ja, kann man daraus eine Aussage über kern L ableiten?

Aufgabe 2. (2+4 Punkte)

i) Es seien a, $b \in \mathbb{R}$ fixiert und $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$L(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} b+2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1^a + x_2 \end{pmatrix} .$$

Ist L eine lineare Abbildung?

ii) Es sei $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$L(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{pmatrix} .$$

Durch welche Matrix wird L bzgl. der kanonischen Basen dargestellt? Bestimmen Sie kern L, rg L und bild L.

Aufgabe 3. (2.5+3.5 Punkte)

i) Finden Sie eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $L(3) = -2$.

Zeigen Sie, dass es keine weitere lineare Abbildung $\tilde{L}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{L}(3) = -2$ gibt, d.h. aus $\tilde{L}(3) = -2$ folgt für die lineare Abbildung $\tilde{L}$: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\tilde{L}(x) = L(x)$.

Bitte wenden.

ii) Finden Sie eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ist diese eindeutig bestimmt? Bestimmen Sie den Kern und das Bild von L.

Aufgabe 4. (3 Punkte) Zeigen Sie: Kern und Bild einer linearen Abbildung $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sind Unterräume des $\mathbb{R}^m$ bzw. des $\mathbb{R}^n$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 17.05.2018, 10.10 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/HMI2/hmi2.html