Fachrichtung Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Daniel Kraemer

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II, Blatt 6
Sommersemester 2018

Aufgabe 1. (3 Punkte) Es sei $a \in \mathbb{R}$ und bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ sei die lineare Abbildung $L_a \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dargestellt durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} .$$

Für welche a (falls es solche gibt) ist $\dim \operatorname{bild} L_a = 0$, $\dim \operatorname{bild} L_a = 1$, $\dim \operatorname{bild} L_a = 2$, $\dim \operatorname{bild} L_a = 3$? Ändert sich das Ergebnis, wenn A die Matrixdarstellung von L_a bzgl. anderer Basen ist?

Aufgabe 2. (1+4+2+2 Punkte) Man betrachte die lineare Abbildung $L \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die bestimmt ist durch

$$L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}) = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)} + \underline{\mathbf{f}}^{(3)} , \quad L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)}) = 2\underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)} .$$

Dabei bezeichne $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = (\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)})$ bezeichne die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.

i) Bestimmmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. der kanonischen Basen.

ii) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. der Basen $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$ des $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{W} = (\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)}, \underline{\mathbf{w}}^{(3)})$ des $\mathbb{R}^3$, wobei gelte

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{e}}^{(2)} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} - 2\underline{\mathbf{e}}^{(2)} ;$$
$$\underline{\mathbf{w}}^{(1)} = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(3)} , \quad \underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)} , \quad \underline{\mathbf{w}}^{(3)} = \underline{\mathbf{f}}^{(2)} + \underline{\mathbf{f}}^{(3)} .$$

Machen Sie eine Probe.

iii) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der linearen Abbildung L.

iv) Kann es eine Basis $\mathcal{G} = (\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \underline{\mathbf{g}}^{(2)}, \underline{\mathbf{g}}^{(3)})$ des $\mathbb{R}^3$ geben, sodass die Matrixdarstellung von L bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$ und bzgl. $\mathcal{G}$ gegeben ist durch

$$A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ?$$

Erinnerung zur Notation: Ist $L \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und sind $\mathcal{G}$ (als Basis des Urbildraumes) und $\mathcal{H}$ (als Basis des Bildraumes) Basen des $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$, so bezeichnet $A^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}$ die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. dieser Basen.

Bitte wenden.

Aufgabe 3. ((1+2.5+2)+2.5 Punkte)

i) Man betrachte die lineare Abbildung L: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die bestimmt ist durch die Matrixdarstellung

$$A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bzgl. der kanonschen Basis des $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie $L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)})$ und $L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)})$.

(b) Es seien $\mathcal{K} = (\underline{\mathbf{k}}^{(1)}, \underline{\mathbf{k}}^{(2)})$,

$$\underline{\mathbf{k}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{e}}^{(2)} , \qquad \underline{\mathbf{k}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} ,$$

und $\mathcal{L} = (\underline{\mathbf{l}}^{(1)}, \underline{\mathbf{l}}^{(2)})$,

$$\underline{\mathbf{l}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{e}}^{(2)} , \qquad \underline{\mathbf{l}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} ,$$

weitere Basen des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie $A^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}}$ und machen Sie eine Probe.

(c) Gibt es eine Basis $\mathcal{G} = (\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \underline{\mathbf{g}}^{(2)})$ des $\mathbb{R}^2$ mit

$$A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ?$$

ii) Es sei $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{K} = (\underline{\mathbf{k}}^{(1)}, \underline{\mathbf{k}}^{(2)})$ und $\mathcal{L} = (\underline{\mathbf{l}}^{(1)}, \underline{\mathbf{l}}^{(2)})$ seien zwei weitere Basen des $\mathbb{R}^2$ mit

$$\underline{\mathbf{e}}^{(1)} = 2\underline{\mathbf{k}}^{(2)} - \underline{\mathbf{k}}^{(1)} , \qquad \underline{\mathbf{e}}^{(2)} = \underline{\mathbf{k}}^{(1)} - \underline{\mathbf{k}}^{(2)}$$

sowie

$$\underline{\mathbf{e}}^{(1)} = \underline{\mathbf{l}}^{(2)} , \qquad \underline{\mathbf{e}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{l}}^{(1)} - \underline{\mathbf{l}}^{(2)}) .$$

Man betrachte die lineare Abbildung L: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die bestimmt ist durch die Matrixdarstellung

$$A^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} .$$

bzgl. der Basen $\mathcal{L}$ und $\mathcal{K}$.

Bestimmen Sie $A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ und machen Sie eine Probe.

Erinnerung zur Notation: Ist L: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung und sind $\mathcal{G}$ (als Basis des Urbildraumes) und $\mathcal{H}$ (als Basis des Bildraumes) Basen des $\mathbb{R}^2$, so bezeichnet $A^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}$ die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. dieser Basen.

Abgabe: Bis Donnerstag, 24.05.2018, 10.10 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/HMI2/hmi2.html