Fachrichtung Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Daniel Kraemer

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II, Blatt 7
Sommersemester 2018

Aufgabe 1. (1+2+1 Punkte) Zeigen Sie:

i) Die Betragsfunktion ist Lipschitz-stetig.

ii) Lipschitz-stetige Funktionen (und damit auch die Betragsfunktion) sind gleichmäßig stetig.

iii) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$, ist im Nullpunkt stetig aber nicht Lipschitz-stetig.

Aufgabe 2. (0.5+0.5+1+1+1+1 Punkte) Es sei f eine Funktion $I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein (verallgemeinertes) Intervall bezeichne.

Dann lassen sich auch die **einseitigen Grenzwerte** definieren:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_0 \quad &:\Leftrightarrow \quad \text{für alle } \{x_n\},\ x_n \in I,\ x_n < x_0 \text{ gilt:} \\
&\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0\ ; \\
\lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_0 \quad &:\Leftrightarrow \quad \text{für alle } \{x_n\},\ x_n \in I,\ x_n > x_0 \text{ gilt:} \\
&\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0\ .
\end{aligned}$$

Weierhin definiere man für eine reelle Zahlenfolge $\{x_n\}$ (anlog der Fall “$-\infty$”):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty :\Leftrightarrow \text{Zu jedem } M > 0 \text{ existiert ein } N \in \mathbb{N}, \text{ sodass } M < x_n \text{ für alle } n > N,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0 :\Leftrightarrow \text{für alle } \{x_n\},\ x_n \in I,\ \text{gilt: } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0\ .$$

Existieren die folgenden Grenzwerte:

$$\begin{aligned}
&i) && \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x^3+x^2}\,, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x^3+x}\,, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3}\,, \\
&ii) && \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\cos(x)}{|x+1|}\,, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{(x^2+1)\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)}\,, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x\cos(x)}{|x|}\ ?
\end{aligned}$$

Bitte wenden.

Aufgabe 3. (je 2 Punkte)

i) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} (e^x - 1)\sin(1/x) & \text{für} \quad x \neq 0\ , \\ 0 & \text{für} \quad x = 0\ . \end{cases}$$

Ist f eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion?

ii) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^x \sin(1/x) & \text{für} \quad x \neq 0\ , \\ 0 & \text{für} \quad x = 0\ . \end{cases}$$

Ist f eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion?

iii) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin(x) & \text{für} \quad x \neq 0\ , \\ 0 & \text{für} \quad x = 0\ . \end{cases}$$

Ist f eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion?

iv) Es sei $a \in \mathbb{R}$ fixiert und die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\sin^2(\ln(|x|^2)) & \text{für} \quad x \neq 0\ , \\ a & \text{für} \quad x = 0\ . \end{cases}$$

Ist f eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion?

Aufgabe 4. (3 Punkte) Es seien f, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion $f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, 30.05.2018, 15.00 Uhr, Briefkasten U.G., Geb. E2 5.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

https://www.math.uni-sb.de/ag/bildhauer/HMI2/hmi2.html