Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
P.D. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Christian Tietz

Saarbrücken, 26.07.2014

Klausur zur Vorlesung HMI II

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Aufgabe 1. (Matrizen, lin. Gleichungssyteme, lin. Abb.; **1.5+1.5+3+1 +2+1 Punkte**)

i) Es sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \in M(3,3) \, .$$

(a) Bestimmen Sie rg A.

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$?

(c) Für welche $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ ist das inhomogene Gleichungssystem $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ lösbar? Falls es lösbar ist, ist die Lösung dann eindeutig? Wie lautet die allgemeine Lösung?

ii) Man betrachte die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die bestimmt ist durch

$$L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}) = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} \, , \qquad L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)}) = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} \, , \qquad L(\underline{\mathbf{e}}^{(3)}) = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} \, .$$

Dabei bezeichne $(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \underline{\mathbf{e}}^{(3)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmmen Sie die Matrixdarstellung $A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ der linearen Abbildung.

(b) Es sei $\mathcal{V}$ die Basis $(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)})$ des $\mathbb{R}^3$, wobei gelte

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} + \underline{\mathbf{e}}^{(3)} \, , \qquad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} \, , \qquad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} \, .$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellungen $A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}}$ und $A^{\mathcal{V}}_{\mathcal{E}}$ der linearen Abbildung.

(c) Bestimmen Sie die Koordinaten von $L(\underline{\mathbf{v}}^{(2)})$ bzgl. der Basis $\mathcal{V}$.

Erinnerung zur Notation: Ist $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung und sind $\mathcal{G}$ (als Basis des Urbildraumes) und $\mathcal{H}$ (als Basis des Bildraumes) Basen des $\mathbb{R}^2$, so bezeichnet $A^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}$ die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. dieser Basen.

Bitte wenden.

Aufgabe 2. (Stetigkeit, Differenzierbarkeit; **2+3+5 Punkte**)

i) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} (e^x - 1)\sin(1/x) & \text{für} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Ist f eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion?

ii) Berechnen Sie – falls existent – die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh^2(x) - x}{\sinh^2(x) + x}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x+x^2} - e^x}{x^2}\,, \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}\,.$$

iii) Es sei $I = [-3, e-1] \subset \mathbb{R}$ und die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x & \text{für} \quad x \leq 0\,, \\ \ln(1+x) & \text{für} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

Ist f stetig auf I? Ist f differenzierbar auf $(-3, e-1)$? Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima von f auf I.

Aufgabe 3. (Integralrechnung; **je 2 Punkte**)

i) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\int \sqrt{1+\sin(x)}\cos(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \frac{x}{x^3+3x^2+3x+1}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \frac{\cosh(x)\sinh(x)}{\cosh^2(x)+\sinh^2(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

ii) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

iii) Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1+\sin(x)}{x(2+x)}\,\mathrm{d}x\ ?$$

Aufgabe 4. (Gemischte Aufgaben: **3+1.5+2.5+3 Punkte**)

i) Berechnen Sie eine Approximation (8 Nachkommastellen) von

$$\int_0^1 x e^{(x^2)}\,\mathrm{d}x$$

mit der Simpson-Regel und mit der summierten Trapez-Regel zu $N = 4$.

Wie groß ist jeweils der (absolute) Fehler?

ii) Es sei $x > -1$, $f(x) = \sqrt{1+x}$, $n = 1$, $h_0 = 1/8$, $h_1 = 1/16$. Berechnen Sie einen Näherungswert ("Extrapolation zum Limes $h \to 0$", 8 Nachkommastellen) für $f'(0)$

(a) mittels des Differenzenquotienten;

(b) mittels des zentralen Differenzenquotienten (als Polynom in h_i^2).

iii) Es sei g: $[0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und f: $[0,1] \to \mathbb{R}$ für alle $x \in (0,1)$ gegeben durch

$$f(x) = \int_0^{x^2} g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Berechnen Sie $f'(x)$.