Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Christian Tietz
M.Sc. Jan Müller

Saarbrücken, 30.07.2016

Klausur zur Vorlesung
Höhere Mathematik für (Naturwiss. &) Ingenieure II

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Aufgabe 1. (Matrizen, lin. Gleichungssyteme, lin. Abb.; **1.5+1.5+(1+1)+1+2+2 Punkte**)

i) Es sei $a \in \mathbb{R}$ fixiert und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(3,3) .$$

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{rg} A$.

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$?

(c) i. Gibt es ein $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$, sodass das lineare Gleichungssystem $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ keine Lösung hat?

ii. Gibt es ein $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$, sodass das lineare Gleichungssystem $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ eine eindeutige Lösung hat?

ii) Man betrachte die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die bestimmt ist durch die Matrixdarstellung

$$A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

bzgl. der kanonschen Basis des $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie $L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)})$ und $L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)})$.

(b) Es seien $\mathcal{K} = (\underline{\mathbf{k}}^{(1)}, \underline{\mathbf{k}}^{(2)})$,

$$\underline{\mathbf{k}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{e}}^{(2)} , \qquad \underline{\mathbf{k}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} ,$$

und $\mathcal{L} = (\underline{\mathbf{l}}^{(1)}, \underline{\mathbf{l}}^{(2)})$,

$$\underline{\mathbf{l}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{e}}^{(2)} \ , \qquad \underline{\mathbf{l}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} \ ,$$

weitere Basen des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie $A_{\mathcal{K}}^{\mathcal{L}}$.

(c) Gibt es eine Basis $\mathcal{G} = (\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \underline{\mathbf{g}}^{(2)})$ des $\mathbb{R}^2$ mit

$$A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Erinnerung zur Notation: Ist $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung und sind $\mathcal{G}$ (als Basis des Urbildraumes) und $\mathcal{H}$ (als Basis des Bildraumes) Basen des $\mathbb{R}^2$, so bezeichnet $A_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}}$ die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. dieser Basen.

Aufgabe 2. (Stetigkeit, Differenzierbarkeit; **2+(1+1)+6 Punkte**)

i) Die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$h(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für} \quad x \leq 0 \ , \\ \cos(x) & \text{für} \quad x > 0 \ . \end{cases}$$

Ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xh(x)$ eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion?

ii) Berechnen Sie – falls existent – die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh^2(x) - 1}{\sin^2(x)} \ , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{e^x - 1} \ .$$

iii) Es sei $I = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ und die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = |x|e^{-x^2-1} \ .$$

Ist f stetig auf I? Ist f differenzierbar auf $(-1, 1)$? Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima von f auf I.

Aufgabe 3. (Integralrechnung; **(1+2+2)+(1+2)+2 Punkte**)

i) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\int \cosh(\sin(x))\cos(x) \ \mathrm{d}x \ , \quad \int \frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} \ \mathrm{d}x \ , \quad \int \frac{1}{x\ln(x)} \ \mathrm{d}x \ .$$

ii) Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin(x) \ \mathrm{d}x \ , \qquad \int_0^{\pi/2} x(2\cos(x)\sin(x)) \ \mathrm{d}x \ .$$

iii) Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{xe^x}\,\mathrm{d}x\ ?$$

Aufgabe 4. (Gemischte Aufgaben: **2+3+(1+2)+2 Punkte**)

i) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = -i$ und veranschaulichen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene.

ii) Betrachten Sie die Daten

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\ .$$

Es sei $f(x) = a_1 + a_2 x$. Bestimmen Sie a_1, a_2 nach der Methode der kleinsten Quadrate zu diesen Daten.

iii) Es sei $f(x) = \ln(1+x)$, $n = 1$, $h_0 = 1/8$, $h_1 = 1/16$. Berechnen Sie einen Näherungswert ("Extrapolation zum Limes $h \to 0$", 8 Nachkommastellen) für $f'(0)$

(a) mittels des Differenzenquotienten;

(b) mittels des zentralen Differenzenquotienten (als Polynom in h_i^2).

iv) Es sei $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ für alle $x \in (0,1)$ gegeben durch

$$f(x) = \int_0^{x^2} g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Berechnen Sie $f'(x)$.