Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Christian Tietz

Saarbrücken, 13.10.2014

Klausur zur Vorlesung HMI II

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Aufgabe 1. (Matrizen, lineare Abbildungen; **4.5+1+2.5+1+1 Punkte**)

i) Es sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3,3) \, .$$

Berechnen Sie die Determinate von A. Ist A invertierbar? Falls ja, berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} und machen Sie eine Probe.

ii) Man betrachte die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die bestimmt ist durch

$$L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}) = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)} + \underline{\mathbf{f}}^{(3)} \, , \qquad L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)}) = 2\underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \, .$$

Dabei bezeichne $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = (\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)})$ bezeichne die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. der kanonischen Basen.

(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. der Basen $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$ des $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{W} = (\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)}, \underline{\mathbf{w}}^{(3)})$ des $\mathbb{R}^3$, wobei gelte

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{e}}^{(2)} \, , \qquad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} - 2\underline{\mathbf{e}}^{(2)} \, ;$$
$$\underline{\mathbf{w}}^{(1)} = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(3)} \, , \qquad \underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \, , \qquad \underline{\mathbf{w}}^{(3)} = \underline{\mathbf{f}}^{(2)} + \underline{\mathbf{f}}^{(3)} \, .$$

(c) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der linearen Abbildung L.

Bitte wenden.

(d) Kann es eine Basis $\mathcal{G} = (\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \underline{\mathbf{g}}^{(2)}, \underline{\mathbf{g}}^{(3)})$ des $\mathbb{R}^3$ geben, sodass die Matrixdarstellung von L bzgl. der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^2$ und bzgl. $\mathcal{G}$ gegeben ist durch

$$A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \ ?$$

Erinnerung zur Notation: Ist $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und sind $\mathcal{G}$ (als Basis des Urbildraumes) und $\mathcal{H}$ (als Basis des Bildraumes) Basen des $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$, so bezeichnet $A^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}$ die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. dieser Basen.

Aufgabe 2. (Stetigkeit, Differenzierbarkeit; **2+3+5 Punkte**)

i) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} e^x \sin(1/x) & \text{für} \quad x \neq 0\ , \\[2ex] 0 & \text{für} \quad x = 0\ . \end{cases}$$

Ist f eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion?

ii) Berechnen Sie – falls existent – die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x) - \sinh(x)}{x}\ , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x^2}\ , \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1/x)}{x}\ .$$

iii) Es sei $I = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ und die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 + x| & \text{für} \quad x \leq 0\ , \\ x^2(x-1) & \text{für} \quad x > 0\ . \end{cases}$$

Ist f stetig auf I? Ist f differenzierbar auf $(-1, 1)$? Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima von f auf I.

Aufgabe 3. (Integralrechnung; **je 2 Punkte**)

i) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\int \sqrt{1 + \sinh(x)}\, \cosh(x)\, \mathrm{d}x\ , \qquad \int \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}\, \mathrm{d}x\ ,$$

$$\int e^{\cos^2(x) - \sin^2(x)} \sin(x)\cos(x)\, \mathrm{d}x\ .$$

ii) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^e x^2 \ln(x)\, \mathrm{d}x\ .$$

iii) Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\pi \frac{1+\sin(x)}{x(2+x)}\,\mathrm{d}x\ ?$$

Aufgabe 4. (Gemischte Aufgaben: **3+3+2+2 Punkte**)

i) Es sei $f(x) = a_1 + a_2 x$. Bestimmen Sie a_1, a_2 nach der Methode der kleinsten Quadrate zu den Daten

x_i	0	1	2	3
y_i	3	1	1	0

.

ii) Berechnen Sie eine Approximation (8 Nachkommastellen) von

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$$

mit der Simpson-Regel und mit der summierten Trapez-Regel zu $N = 4$.

Wie groß ist jeweils der (absolute) Fehler?

(Bemerkung: Wundern Sie sich nicht über das Ergebnis: Die Aufgabe kann auch ohne Taschenrechner exakt gelöst werden.)

iii) (a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x^2 \sin(x)\ .$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades $T_3(x; x_0)$ von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades $T_3(x; x_0)$ von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.