Kapitel 1

Kurvenintegrale

1.1 Definition und Eigenschaften (Wegunabhängigkeit; Potential; konservatives Vektorfeld)

Typisches Beispiel. Man betrachte eine stetig differenzierbare Kurve

$$\gamma : \quad I = [a, b] \to U \subset \mathbb{R}^m \,.$$

In einem Kraftfeld F: $U \to \mathbb{R}^m$ bewege sich ein Massenpunkt längs dieser Kurve.

Die zu verrichtende Arbeit („Kraft $\times$ Weg") ist nur vom Anteil der Kraft in Kurvenrichtung abhängig, wie es in Abbildung 1.1 angedeutet ist, d.h. es ist das Skalarprodukt aus Kraft und Weg zu betrachten.

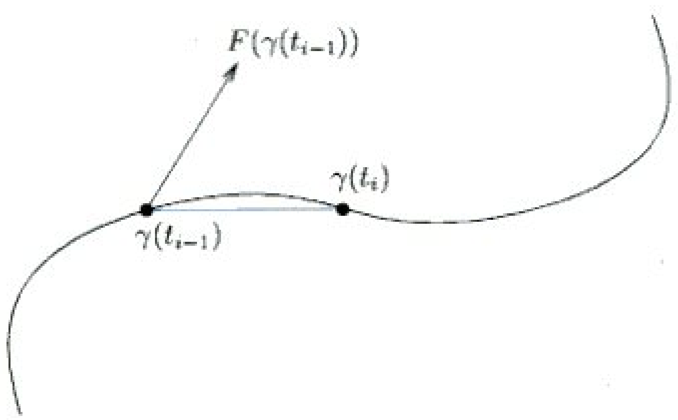

Abbildung 1.1: Zur Berechnung der verrichteten Arbeit.

Definition 1.1. KURVENINTEGRAL

Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ sei ein stetiges Vektorfeld und $\gamma\colon I = [a, b] \to U$ sei eine glatte Kurve.

Dann heißt

$$\int_\gamma \langle F,\ \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}}\rangle := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \ \mathrm{d}t =: \int_\gamma \left[\sum_{i=1}^m F_i \ \mathrm{d}x_i\right]$$

das Kurvenintegral des Vektorfeldes F längs der Kurve γ.

Bemerkungen.

i) Um auch stückweise glatte Kurven γ betrachten zu können, die sich wie in Abbildung 1.2 aus glatten „Teilkurven" $\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(k)}$ stetig zusammensetzen, definiert man

$$\int_\gamma \langle F,\ \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}}\rangle := \sum_{i=1}^k \int_{\gamma^{(i)}} \langle F,\ \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}}\rangle \ .$$

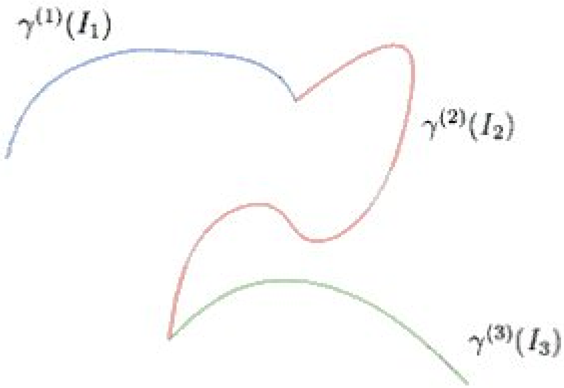

Abbildung 1.2: Eine stückweise glatte Kurve.

ii) Nach obiger Motivation des Kurvenintegrals über den Begriff der Arbeit sollte ein Kurvenintegral invariant unter orientierungserhaltenden Parametertransformationen sein.

Tatsächlich gilt für eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$, eine glatte orientierungstreue Parametertransformation $\varphi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ sowie $\tilde{\gamma}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$:

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{\gamma}} \langle F,\ \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}}\rangle &= \int_\alpha^\beta \langle F(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}'(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_\alpha^\beta \langle F \circ \gamma(\varphi(\tau)), \gamma'(\varphi(\tau))\rangle \varphi'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&\overset{\text{Subst.}}{=} \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t = \int_\gamma \langle F,\ \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}}\rangle\ .
\end{aligned}$$

iii) Identifiziert man (als sogenannte Äquivalenzrelation) Kurven, die durch orientierungserhaltende Parametertransformationen auseinander hervorgehen, so spricht man von einem Weg.

Nach ii) ist es dann auch berechtigt, von einem Wegintegral zu sprechen. Auf die genaue Unterscheidung zwischen Kurve und Weg wird hier meist nicht eingegangen.

iv) Ist $\tilde{\gamma}$ eine Kurve, die mittels einer orientierungsumkehrenden Parametertransformation aus γ hervorgeht, so sieht man wie oben

$$\int_{\tilde{\gamma}} \langle F,\ \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}}\rangle = -\int_\gamma \langle F,\ \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}}\rangle\ .$$

Aus diesem Grunde wird auch $-\gamma$ für einen in umgekehrter Orientierung durchlaufenen Weg geschrieben.

Beispiele.

i) Es fließe ein konstanter Strom I durch einen unendlich langen Leiter im $\mathbb{R}^3$. Es wird ein Magnetfeld

$$B:\quad U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \neq 0\} \to \mathbb{R}^3$$

aufgebaut mit

$$B(\underline{\mathbf{x}}) = I \begin{pmatrix} -\dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

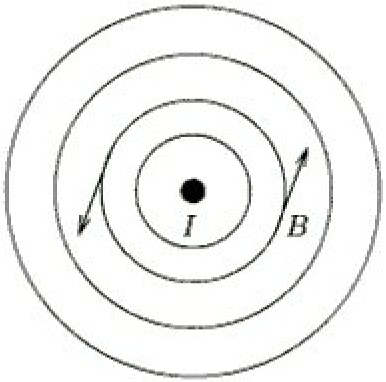

Abbildung 1.3: Magnetfeld um einen Leiter.

Berechnet werden soll nun das Kurvenintegral längs der Kurve γ,

$$t \in [0, 2\pi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ konst. \end{pmatrix} , \qquad r > 0 .$$

Es ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma \langle B,\, \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}} \rangle &= I \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \left\langle \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t \\ &= I \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}t = 2\pi I . \end{aligned}$$

Auf dieses Beispiel wird in Kürze noch zurückgegriffen werden.

ii) Das Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$F(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} .$$

Betrachtet seien weiter die Kurven

$$\gamma: \ t \in [0,1] \ \to \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ,$$
$$\tilde{\gamma}: \ t \in [0,1] \ \to \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 .$$

Zu beachten ist dabei: Anfangs- und Endpunkt beider Kurven stimmen überein (vgl. Abbildung 1.4).

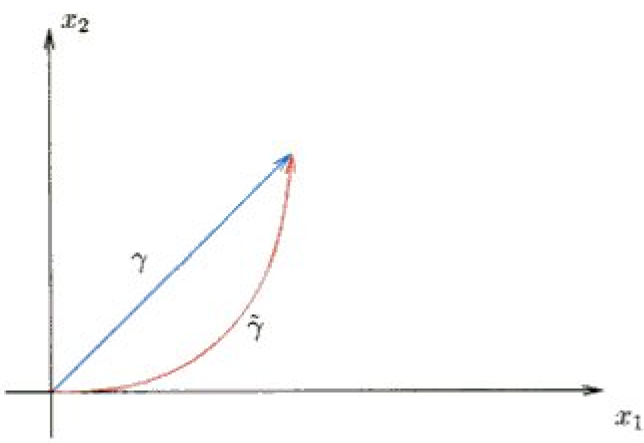

Abbildung 1.4: Zur Wegabhängigkeit des Kurvenintegrals.

Es gilt aber:

$$\begin{aligned} \int_\gamma \langle F, \, \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}} \rangle &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 + t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 3t^2 \, \mathrm{d}t = 1 , \\ \int_{\tilde{\gamma}} \langle F, \, \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}} \rangle &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 + t^4 \\ t^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 (3t^4 + t^2) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{14}{15} . \end{aligned}$$

Im Allgemeinen hängt das Kurvenintegral also nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab, es kommt auch auf die spezielle Wahl des Weges an.

Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals?

Frage. In welchen Fällen ist das Kurvenintegral wegunabhängig, d.h. nur vom Anfangs- und vom Endpunkt abhängig?

Dabei ist die Wegunabhängigkeit äquivalent zu

$$\int_\gamma \langle F,\, \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}} \rangle = 0 \qquad \text{für jeden geschlossenen Weg}\ ,$$

d.h. für jede geschlossen durchlaufene Kurve γ, d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Dies sieht man anhand von Abbildung 1.5 ein, indem man den Weg $\gamma = \gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}$ betrachtet.

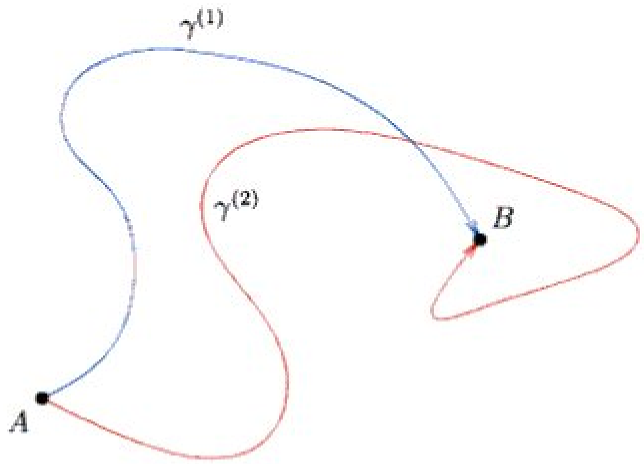

Abbildung 1.5: Wegabhängigkeit und geschlossene Wege.

Beispiel. Wird eine Masse im Gravitationsfeld angehoben, so ist die verrichtete Arbeit nur abhängig von der überwundenen Höhe, der Weg, auf dem das geschehen ist, spielt keine Rolle. Das Gravitationsfeld ist konservativ.

Werden hingegen Reibungsverluste berücksichtigt, so wird die spezielle Wahl des Weges eine wichtige Rolle spielen.

Definition 1.2. POTENTIAL

Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ sei ein stetiges Vektorfeld.

Falls eine Funktion $\varphi\colon U \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$F(\underline{\mathbf{x}}) = \nabla\varphi(\underline{\mathbf{x}}) \quad \textit{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in U \ ,$$

so heißt φ ein Potential von F.

Das Vektorfeld F bezeichnet man in diesem Fall als konservativ.

Satz 1.1. KONSERVATIVES VEKTORFELD

Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ sei ein stetiges, konservatives Vektorfeld.

Ist $\gamma\colon [a,b] \to U$ eine (stückweise) glatte Kurve und ist φ ein Potential von F, so gilt

$$\int_\gamma \langle F,\ \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}}\rangle = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \ .$$

Beweisidee Man berechne $\int_a^b \frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))\ dt$ (siehe Übungskapitel 1.2). □

Beispiele.

i) Es sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^3 \\ 3x_1x_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dann gilt $F = \nabla\varphi$ mit

$$\varphi(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2^3 + x_3 \ .$$

Zu beachten ist hier (nachrechnen!)

$$\mathrm{rot}\ F = \underline{\mathbf{0}}\ .$$

Allgemein wurde für beliebiges φ: $\mathbb{R}^3 \subset U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^2 im Übungskapitel **??** nachgerechnet:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ \varphi) = \underline{\mathbf{0}}\ .$$

Hat demnach ein (glattes) Vektorfeld F: $\mathbb{R}^3 \subset U \to \mathbb{R}^3$ ein Potential, so muss rot F verschwinden (als notwenige Bedingung für die Existenz eines Potentials).

ii) Zurück zum Beispiel des unendlich langen Leiters: Es sei wieder

$$B(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -\dfrac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \dfrac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Betrachtet man auf $U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 > 0\}$ die Funktion

$$\varphi(\underline{\mathbf{x}}) = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) ,$$

so erkennt man (vgl. Übungskapitel **??**)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} &= \frac{1}{1+\frac{x_2^2}{x_1^2}}\Big(-\frac{1}{x_1^2}x_2\Big) = -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} ,\\
\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} &= \frac{1}{1+\frac{x_2^2}{x_1^2}}\frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} ,\\
\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} &= 0 ,
\end{aligned}$$

φ ist also auf U ein Potential von B.

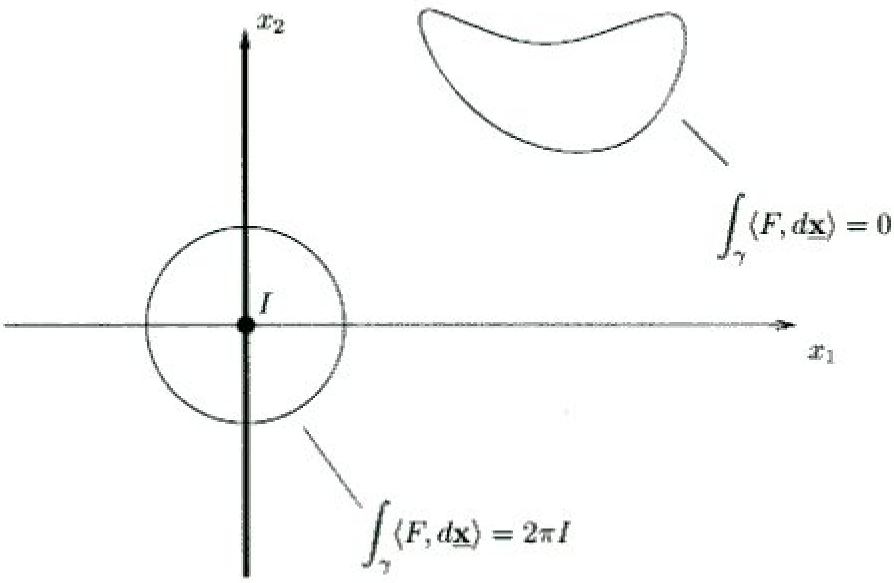

Abbildung 1.6: B kann kein „globales" Potential haben.

Nach Satz 1.1 kann B aber kein Potential auf $\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$ haben (vgl. auch Abbildung 1.6).

Als Übung berechne man rot B auf $\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \neq \underline{\mathbf{0}}\}$ und interpretiere das Ergebnis (vgl. Übungskapitel 1.2).

1.2 Übungsaufgaben zu Kapitel 1

Werden später eingefügt.