Kapitel 1

Der Satz von Taylor

1.1 Taylor-Formel und Taylor-Reihe (Taylor-Polynom; Restglied; Integraldarstellung des Restgliedes; Lagrangesche Restgliedformel; die Klasse C^∞; reell analytische Funktionen)

In Kapitel **??** wird eine Funktion f in der Nähe eines fixierten Punktes x_0 mit einer (affin) linearen Funktion approximiert, deren Steigung die erste Ableitung von f im Punkt x_0 ist.

Für eine „bessere" Approximation, die beispielsweise auch das Krümmungsverhalten von f berücksichtigt, liegt es nahe, die Funktion mit quadratischen Polynomen bzw. mit Polynomen höherer Ordnung zu approximieren (nicht zu verwechseln mit der Polynominterpolation aus Teil I, Kapitel 6). Als Preis ist der höhere Rechenaufwand zu zahlen.

Entscheidend ist bei diesen Betrachtungen die Güte der Approximation, d.h. die Abweichung der Approximation von der gegebenen Funktion f.

Dieser Fehler hängt offensichtlich im Allgemeinen davon ab, wie weit man sich vom gegebenen Punkt x_0 entfernt. In Abbildung 1.1 ist zur Veranschaulichung der Sinus mit einem Polynom ersten, dritten und fünften Grades approximiert.

Motivation für die Taylorsche Formel: Polynome.

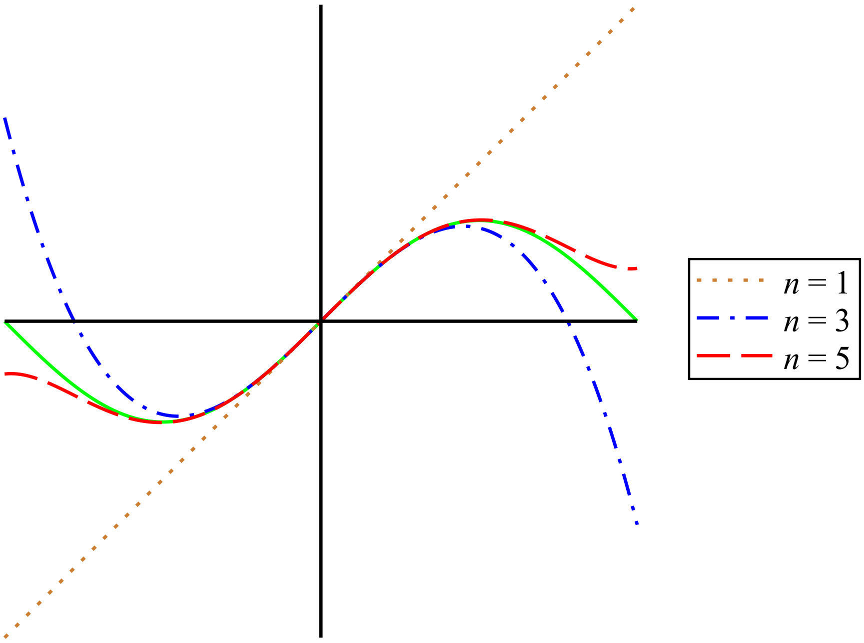

Abbildung 1.1: Taylor-Polynome des Sinus.

Man betrachte im einfachsten Fall ein Polynom vom Grad n,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n .$$

Für $k = 0, 1, \ldots, n$ ist die k-te Ableitung an der Stelle Null

$$p^{(k)}(0) = k! a_k ,$$

mit anderen Worten: Es gilt

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} p^{(k)}(0) x^k .$$

Zu beliebigem $x_0 \in \mathbb{R}$ kann das Polynom ebenso in der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k ,$$

geschrieben werden und analog gilt

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} p^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \ .$$

Falls eine Funktion in Polynomdarstellung „entwickelt" werden kann, so müssen die Koeffizienten ebenfalls von dieser Form sein.

Definition 1.1. TAYLORSCHE FORMEL

Es sei $f\colon I = (a, b) \to \mathbb{R}$ von der Klasse $C^n(I)$ und es sei $x_0 \in (a, b)$.

Dann heißt

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

das Taylor-Polynom n-ten Grades zum Entwicklungspunkt x_0.

Die Taylorsche Formel lautet

$$f(x) = T_n(x; x_0) + R_n(x - x_0) \ ,$$

wobei das Restglied $R_n(x - x_0)$ im Folgenden zu quantifizieren ist.

Bemerkungen.

i) Das Taylor-Polynom ist nach Definition 1.1 so aufgebaut, dass die Ableitungen des Taylor-Polynoms an der Stelle x_0 bis zur Ordnung n mit denen von f übereinstimmen.

ii) Die Taylorsche Formel in Definition 1.1 ist lediglich eine Definition des Restglieds. Ohne eine Abschätzung der Größe des Restglieds enthält sie keinerlei Information.

Beispiel. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, fixiert und für $x > -1$ sei $f(x) = (1 + x)^\alpha$.

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} , \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} , \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} . \end{aligned}$$

Setzt man in Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten (Teil I, Definition 2.2) für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} , \qquad \binom{\alpha}{0} = 1 ,$$

so folgt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x) .$$

Man vergleiche dies mit dem binonischen Lehrsatz (Teil I, Satz 2.2).

Zur Güte der Approximation.

Eine Antwort auf die Frage nach der Größe des Fehlers gibt

Satz 1.1. ERSTE DARSTELLUNG DES RESTGLIEDS

Es sei $f\colon I = (a,b) \to \mathbb{R}$ *von der Klasse* $C^{n+1}(I)$ *und es seien* x_0, $x = x_0 + h \in (a,b)$.

Dann gilt

$$R_n(h) = \int_0^1 \frac{1}{n!}(1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)h^{n+1}\,\mathrm{d}t .$$

Beweis. Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden Lemma (vgl. Übungskapitel 1.2). □

Lemma 1.1. HERLEITUNG DER RESTGLIEDDARSTELLUNG

Für eine stetige Funktion φ: $[0,1] \to \mathbb{R}$ von der Klasse $C^{n+1}((0,1))$ gilt

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0) + \int_0^1 \frac{1}{n!}(1-t)^n \varphi^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

Beweis. Der Beweis folgt induktiv mithilfe partieller Integration (vgl. Übungskapitel 1.2) □

Weitere Darstellungen des Restglieds.

Es gibt eine Reihe von verschiedenen Darstellungen des Restgliedes:

Über eine einfache Substitution gelangt man zur Integraldarstellung des Restgliedes in ihrer üblichen Form.

Die wohl bekannteste Darstellung ist die Lagrangesche Restgliedformel. Sie folgt mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung (siehe Übungskapitel Satz **??**).

Korollar 1.1. WEITERE RESTGLIEDDARSTELLUNGEN

Es seien f, x und x_0 wie oben gegeben, $h = x - x_0$.

i) Integraldarstellung des Restgliedes: Es ist

$$R_n(x - x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

ii) Lagrangesche Restgliedformel: Es ist für ein $\theta \in (0,1)$

$$R_n(x - x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h) h^{n+1}\ .$$

Wie in der Einleitung dieses Kapitels bereits angedeutet, erkennt man, dass eine „gute Approximation" der Funktion durch ein Taylor-Polynom in der Regel nur für „kleine $|h|$" erwarten werden, d.h. in der Nähe des Entwicklungspunktes x_0.

Umgekehrt ausgedrückt: Ist bei festem n der Punkt x sehr weit von x_0 entfernt, so kann das Restglied (der Fehler) sehr groß werden.

Beispiele.

i) Es sei $f(x) = e^x$. Dann ist

$$T_n(x;0) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \, ,$$

genau wie es die Definition als Potenzreihe erwarten lässt.

Für das Restglied gilt (für ein $\theta \in (0,1)$)

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \Big|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\Big| |x^{n+1}| \le \frac{e^{\theta |x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \\ &\le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \, . \end{aligned}$$

Insbesondere ist für jedes fixierte $x \in \mathbb{R}$ bewiesen:

$$R_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \, .$$

ii) Ähnliches gilt für $\sin(x)$, $\cos(x)$ …(vgl. Übungskapitel 1.2). Die Taylor-Polynome des Sinus zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ sind in Abbildung 1.1 veranschaulicht.

Entwicklung als Potenzreihe.

Das Beispiel Exponentialfunktion läßt vermuten, dass eine Funktion unter gewissen Voraussetzungen im Grenzwert $n \to \infty$ durch die Taylor-Polynome reproduziert wird, d.h. (zumindest lokal) als Potenzreihe geschrieben werden kann.

Es stellen sich die wesentlichen Fragen:

i) Konvergiert die Folge $\{T_n(x; x_0)\}$ im Grenzwert $n \to \infty$ gegen eine Funktion $T(x)$?

ii) Falls ja, ist der Grenzwert $T(x)$ gleich $f(x)$?

Ist $f^{(n+1)}$ eine stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$, so ist $f^{(n+1)}$ nach Satz **??** auf $[a, b]$ insbesondere beschränkt.

D.h. es existiert eine Konstante $K = K(n)$ mit $f^{(n+1)}(x) \leq K(n)$ für alle $x \in [a, b]$ und es gilt

$$|R_n(x - x_0)| \leq \frac{K(n)}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} .$$

Da die Konstante $K(n)$ aber von der Ordnung n der Ableitung abhängt, bedeutet das aber noch nicht zwingend, dass das Restglied für große n bei fixiertem x klein wird.

Die Konvergenz von $\{T_n(x; x_0)\}$ bleibt trotz dieser Beobachtung im Unklaren.

Cauchys Beispiel.

Betrachtet sei die in Abbildung 1.2 skizzierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

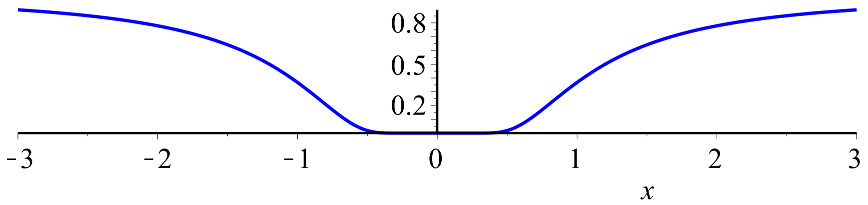

Abbildung 1.2: Cauchys Beispiel.

Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x^{-3}e^{-1/x^2}\,, \\ f''(x) &= (4x^{-6} - 6x^{-4})e^{-1/x^2}\,, \\ \vdots \quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

Induktiv sieht man, dass im Nullpunkt alle rechtsseitigen und linksseitigen Ableitungen existieren und gleich Null sind, die Funktion ist beliebig oft differenzierbar (von der Klasse C^∞) und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$f^{(k)}(0) = 0\,.$$

Dementsprechend gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$T_n(x;0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0\,,$$

alle Taylor-Polynome um 0 verschwinden identisch, die Funktion hingegen nicht und das Restglied kann für große n nicht klein werden.

In der Tat gilt in Cauchys Beispiel nach der Taylorschen Formel für das Restglied um den Nullpunkt: $R_n(x) = f(x)$.

Selbst wenn die Folge $\{T_n(x; x_0)\}$ im Grenzwert $n \to \infty$ konvergiert, kann nicht auf $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x; x_0)$ geschlossen werden.

Reell analytische Funktionen.

Reell analytische Funktionen können per definitionem (lokal) als Potenzreihen dargestellt werden.

An dieser Stelle sei an die Konvergenzkriterien für Potenzreihen aus Teil I, Kapitel 8.2, sowie an die Definitionen von Exponentialfunktion, Sinus, Kosinus ... (Teil I, Kapitel 8.3) erinnert.

Satz 1.2. REELL ANALYTISCHE FUNKTIONEN

Es sei $f\colon I = (a, b) \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und es sei $x_0 \in (a, b)$.

Falls für jedes $x \in (a, b)$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x - x_0) = 0$$

gilt, so ist für alle $x \in (a, b)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \ .$$

Sprechweisen:

i) In diesem Fall heißt die Funktion reell analytisch oder von der Klasse C^ω.

ii) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ heißt Taylor-Reihe von f um den Entwicklungspunkt x_0.

Bemerkungen.

i) Die Potenzreihendarstellung einer Funktion ist, sofern sie existiert, eindeutig bestimmt.

ii) Nach Satz 1.2 konvergiert die Taylor-Reihe von f gegen f, falls das Restglied gegen Null konvergiert.

Beispiel. Es sei $-1/2 < x < 1/2$, $x_0 = 0$ und $f(x) = \ln(1+x)$. Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x}\,, \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2}\,, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k} \qquad \text{für alle } \ k \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Die Identität

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k \end{aligned}$$

folgt aus

Satz 1.3. $\boxed{\text{Kriterium für reell analytische Funktionen}}$

Es sei $f\colon I = (a,b) \to \mathbb{R}$ von der Klasse $C^\infty(I)$ und mit reellen Konstanten M, $r > 0$ gelte für alle $x \in (a,b)$ und für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$|f^{(k)}(x)| \leq k!Mr^{-k}\,.$$

Ist $\delta \in (0,r)$ und ist $x \in (a,b)$ derart, dass $|x - x_0| \leq \delta$ gilt, so folgt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k\,.$$

Beweis des Satzes. Es ist

$$R_n(h) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h) h^{n+1} , \qquad h = x - x_0 ,$$

also für $|x - x_0| < \delta$ nach Voraussetzung

$$|R_n(h)| \leq M \Big(\frac{\delta}{r}\Big)^{n+1} \stackrel{n \to \infty}{\to} 0 ,$$

aus Satz 1.2 folgt die Behauptung. □

Zurück zum Beispiel. Im obigen Beispiel $f(x) = \ln(1+x)$ ist für $|x| < 1/2$ und für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|f^{(k)}(x)| \leq k!(1+x)^{-k} \leq k! \Big(\frac{1}{2}\Big)^{-k} .$$

Nach Satz 1.3 konvergiert die Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ gegen f für $|x| < 1/2$.

Bemerkung. In der Tat kann gezeigt werden, dass die Taylor-Reihe von $\ln(1+x)$ um $x_0 = 0$ für $-1 < x \leq 1$ gegen $\ln(1+x)$ konvergiert.

Konstruktion mithilfe der geometrischen Reihe.

Die explizite Berechnung einer Taylor-Reihe kann in bestimmten Fällen auf eine geometrische Reihe zurückgeführt werden. Dieser „Trick” wird bei der Reihenentwicklung in der Funktionentheorie erneut aufgegriffen.

Es sei beispielsweise die Funktion $f(x) = 1/(1+x)$ um den Punkt $x_0 = 1$ zu entwickeln.

Es ist für $|x-1| < 2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\left[-\frac{x-1}{2}\right]}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}(x-1)^k\ .\end{aligned}$$

1.2 Übungsaufgaben zu Kapitel 1.1

Aufgabe 1.*

i) Zeigen Sie Lemma 1.1.

ii) Zeigen Sie damit Satz 1.1

Aufgabe 2. Zeigen Sie in Cauchys Beispiel mithilfe vollständiger Induktion: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt und für $x \neq 0$ gilt

$$f^{(k)}(x) = p_k(1/x)e^{-1/x^2}\ ,$$

wobei $p_k(t)$ ein Polynom der Ordnung 3 bezeichnet. Folgern Sie daraus $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3.*

i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \mapsto f(x) = (x-2)^2\ .$$

Berechnen Sie für ein fixiertes $x_0 \in \mathbb{R}$ das Taylor-Polynom $T_2(x; x_0)$ zweiten Grades zum Entwicklungspunkt x_0 von f und zeigen Sie $T_2(x; x_0) = f(x)$ (für alle $x \in \mathbb{R}$).

ii) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Taylor-Polynom n^{ten} Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ von $f(x) = xe^{x-1}$.

Aufgabe 4.

i) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom n^{ten} Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ sowie das Restglied in Lagrangescher Darstellung von

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \ .$$

ii) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom n^{ten} Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ von

(a) $f(x) = x^2 + e^x$,

(b) $f(x) = e^{x^2}$.

iii) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritter Ordnung zum Entwicklungspunkt 0 der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$.

Aufgabe 5.

i) Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \cos(x)$ das Restglied $R_2(x - 0)$ in Lagrangescher Darstellung.

ii) Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

mit Hilfe dieser Restgliedabschätzung und der Taylorschen Formel.

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 1.

i) Es wird sukzessive partiell integriert mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{1}{n!}(1-t)^n \varphi^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \varphi^{(n)}(t)\frac{1}{n!}(1-t)^n\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{(n-1)!}(1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \int_0^1 \frac{1}{(n-1)!}(1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \vdots \\
&= -\Big[\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \dots \frac{1}{1!}\varphi'(0)\Big] + \int_0^1 \varphi'(t)\ \mathrm{d}t\ .
\end{aligned}$$

Aus $\int_0^1 \varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \varphi(1) - \varphi(0)$ folgt das Lemma. □

ii) Für $0 \le t \le 1$ setzt man $\varphi(t) := f(x_0 + th)$ und es folgt

$$\varphi'(t) = hf'(x_0+th)\ , \qquad \varphi''(t) = h^2 f''(x_0+th)\ , \qquad \dots\ ,$$

also für $k = 0, 1, \dots, n+1$

$$\varphi^{(k)}(t) = h^k f^{(k)}(x_0+th)\ ,$$

Lemma **??** liefert

$$\begin{aligned}
f(x_0+h) &= \varphi(1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)h^k + \int_0^1 \frac{1}{n!}(1-t)^n f^{(n+1)}(x_0+th)h^{n+1}\ \mathrm{d}t\ .
\end{aligned}$$

Dies ist genau die Behauptung des Satzes. □

Aufgabe 3.

i) Es ist

$$T_2(x;x_0) = (x_0-2)^2 + 2(x_0-2)(x-x_0) + (x-x_0)^2$$

und ausmultiplizieren ergibt die Behauptung.

ii) Man schreibe

$$
\begin{aligned}
xe^{x-1} &= (x-1)e^{x-1} + e^{x-1} \\
&= (x-1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-1)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}(x-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}(x-1)^n
\end{aligned}
$$

oder man zeige induktiv

$$
f^{(()}k)(x) = ke^{x-1} + xe^{x-1}\ .
$$

1.3 Der Satz von Taylor für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Multiindex)

In Kapitel ..., ist der Satz von Taylor in einer Veränderlichen dargestellt.

Zuvor sind bereits in ... lokale Extrema unabhängig davon diskutiert.

Ebenso können aber notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extrema aus dem Satz von Taylor hergeleitet werden.

Diese Reihenfolge wird nun im Fall von Funktionen mehrerer Veränderlicher gewählt.

Zunächst sei daran erinnert, dass im letzten Paragraphen das Differential als „affin lineare Approximation" einer Abbildung $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ interpretiert wurde. Ebenso wurde der Begriff „höhere Ableitungen" zur Verfügung gestellt.

In diesem Abschnitt wird die Taylorsche Formel als „Approximation höherer Ordnung" eingeführt.

Wieder ist im Folgenden $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ ist stets eine skalare Funktion.

Bezeichnungen. Multiindizes: Es sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ein m-Tupel natürlicher Zahlen mit

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_m \ , \qquad \alpha! := \alpha_1!\alpha_2! \dots \alpha_m!$$

Ist f eine $|\alpha|$-mal stetig differenzierbare Funktion, so setzt man

$$\begin{aligned} D^\alpha f &:= D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_m^{\alpha_m} := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \quad \text{mit} \\ D_i^{\alpha_i} &:= \underbrace{D_i \dots D_i}_{\alpha_i\text{-mal}} \ , \qquad i = 1, \ \dots, \ m \ . \end{aligned}$$

Weiterhin sei

$$\underline{\mathbf{x}}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m} \ .$$

Dann gilt die Taylorsche Formel[1] (es wird exemplarisch die Lagrangesche Restgliedformel angegeben, vgl. ...Korollar 7.1, *ii*))

Satz 1.4. TAYLOR-ENTWICKLUNG

Es seien $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$, $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$ *derart, dass für alle* $0 \le t \le 1$ *gilt* $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + t\underline{\xi} \in U$. *Die Funktion* $f\colon U \to \mathbb{R}$ *sei von der Klasse* C^{k+1}.

Dann existiert ein $\theta \in [0,1]$ *mit*

$$f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + \underline{\xi}) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha + \sum_{|\alpha| = k+1} \frac{D^\alpha f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + \theta \underline{\xi})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha .$$

Beweisidee. Man betrachte die Funktion einer Variablen

$$g: \quad [0,1] \to \mathbb{R} , \qquad g(t) := f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + t\underline{\xi}) .$$

Mit dem Satz von Taylor in einer Variablen und der Restglieddarstellung folgt Satz 1.4. □

Bemerkungen.

i) Es ist also

$$f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + \underline{\xi}) = \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha + o(\|\underline{\xi}\|^k) ,$$

wobei $o(\|\underline{\xi}\|^k)$ für eine Funktion $\varphi(\underline{\xi})$ steht mit

$$\varphi(\underline{\mathbf{0}}) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\underline{\xi} \to \underline{\mathbf{0}},\, \underline{\xi} \neq \underline{\mathbf{0}}} \frac{\varphi(\underline{\xi})}{\|\underline{\xi}\|^k} = 0 .$$

Im Hinblick auf diese Notation sei an die Definition der Landauschen Symbole erinnert.

ii) Damit die richtigen Vorfaktoren gewählt sind, ist unbedingt darauf zu achten, dass bei der Definition von $D^\alpha f$ die partiellen Ableitungen in geordneter Reihenfolge beginnend mit D_1 bis hin zu $D_m f$ auftauchen.

[1]Die Bezeichnungen aus Kapitel ..., übertragen sich in natürlicher Weise und werden nicht erneut eingeführt.

Ein Beispiel.

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\underline{\mathbf{x}}) = e^{x_1 x_2}$. Zu berechnen sind zunächst die partiellen Ableitungen:

$$D_1 f(\underline{\mathbf{x}}) = x_2 e^{x_1 x_2}\ , \qquad D_2 f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1 e^{x_1 x_2}\ ,$$

$$D_1 D_1 f(\underline{\mathbf{x}}) = x_2^2 e^{x_1 x_2}\ , \qquad D_1 D_2 f(\underline{\mathbf{x}}) = (1 + x_1 x_2) e^{x_1 x_2}\ ,$$
$$D_2 D_2 f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1^2 e^{x_1 x_2}\ ,$$

$$D_1 D_1 D_1 f(\underline{\mathbf{x}}) = x_2^3 e^{x_1 x_2}, \qquad D_1 D_1 D_2 f(\underline{\mathbf{x}}) = (2x_2 + x_1 x_2^2) e^{x_1 x_2},$$
$$D_1 D_2 D_2 f(\underline{\mathbf{x}}) = (2x_1 + x_2 x_1^2) e^{x_1 x_2}, \qquad D_2 D_2 D_2 f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1^3 e^{x_1 x_2}\ .$$

Es folgt für jedes fixierte $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ und für alle $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} e^{(x_1+\xi_1)(x_2+\xi_2)} &= e^{x_1 x_2} + x_2 e^{x_1 x_2} \xi_1 + x_1 e^{x_1 x_2} \xi_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} x_2^2 e^{x_1 x_2} \xi_1^2 + (1 + x_1 x_2) e^{x_1 x_2} \xi_1 \xi_2 + \frac{1}{2} x_1^2 e^{x_1 x_2} \xi_2^2 \\ &\quad + R_2(\underline{\xi})\ , \end{aligned}$$

wobei mit der Notation $\bar{x}_1 := x_1 + \theta \xi_1$, $\bar{x}_2 := x_2 + \theta \xi_2$, $0 < \theta < 1$ wie in Satz 1.4, gilt

$$\begin{aligned} R_2(\underline{\xi}) &= \frac{1}{3!} \bar{x}_2^3 e^{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \xi_1^3 + \frac{1}{2!} (2\bar{x}_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2^3) e^{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \xi_1^2 \xi_2 \\ &\quad + \frac{1}{2!} (2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \bar{x}_1^2) e^{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \xi_1 \xi_2^2 + \frac{1}{3!} \bar{x}_1^3 e^{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \xi_2^3\ . \end{aligned}$$

Insbesondere geht also $R_2(\underline{\xi})$ wie $\|\underline{\xi}\|^3$ gegen 0 bei $\|\underline{\xi}\| \to 0$.