Geometrische Eigenschaften holomorpher Funktionen, Umkehrfunktionen

Zu Beginn dieses Kapitels werden die geometrischen Eigenschaften holomorpher Funktionen als Abbildungen zwischen zwei Gaußschen Zahlenebenen studiert.

Ist beispielsweise $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$, so betrachte man die Bilder der Kurven $\gamma(t) = iy_0 + t$, $t \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ fixiert.

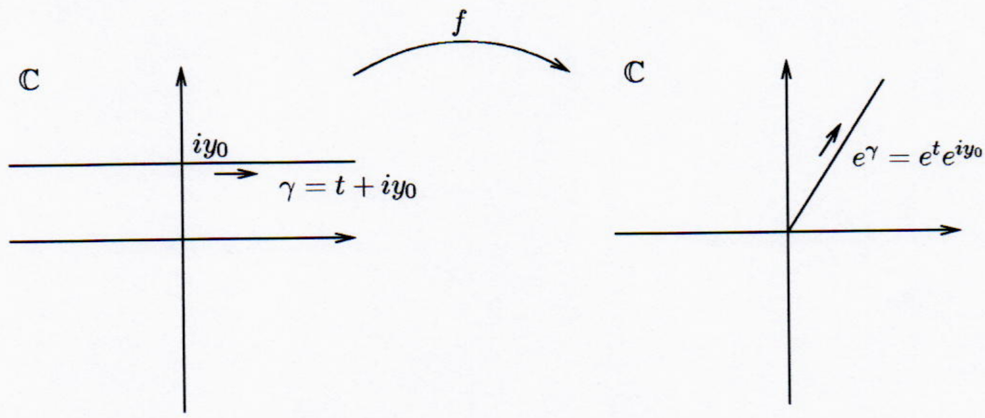

Abbildung 10.1. Die Kurve γ.

Analog betrachte man die Bilder der Kurven $\tilde{\gamma}(t) = x_0 + it$, $t \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ fixiert (vgl. Abbildung 10.2).

Beobachtung. Sowohl die Kurven γ, $\tilde{\gamma}$ sind orthogonal zueinander als auch die Bildkurven e^γ, $e^{\tilde{\gamma}}$.

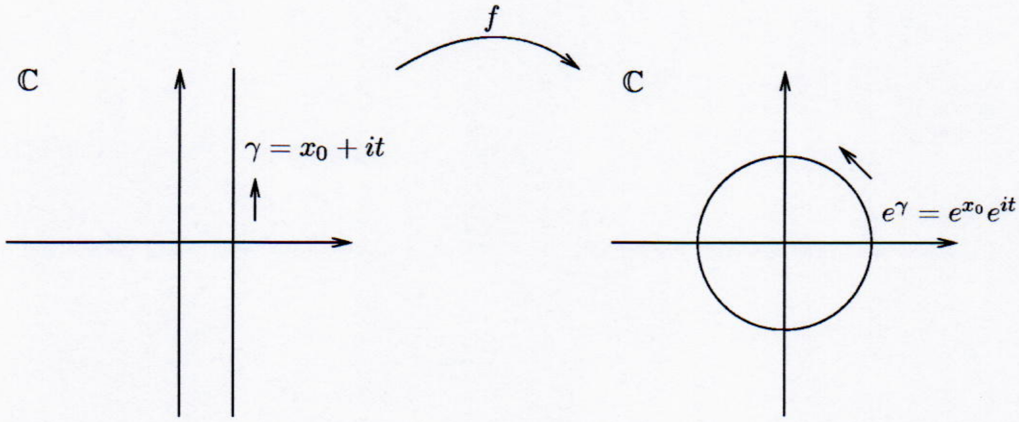

Abbildung 10.2. Die Kurve $\tilde{\gamma}$.

Zunächst muss aber die Frage untersucht werden, wie überhaupt der Schnittwinkel zweier Kurven definiert ist. ↓ (26) 02.07.04

Idee. Man betrachtet die Tangenten an die Kurven im Schnittpunkt.

Definition 10.1.

i) *Es sei z_0 ein Punkt in der komplexen Ebene und γ eine von z_0 ausgehende reguläre glatte Kurve, d.h. (für ein $\varepsilon > 0$) eine stetig differenzierbare Abbildung $[0, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\dot{\gamma}(0) \neq 0$. Die Halbtangente an γ in z_0 ist der Strahl $s \mapsto z_0 + s\dot{\gamma}(0)$, $s \geq 0$.*

ii) *Sind γ_1, γ_2 zwei Kurven wie in* i)*, so ist der orientierte Winkel $\angle(\gamma_1, \gamma_2)$ zwischen γ_1 und γ_2 (in z_0) definiert als der Winkel zwischen ihren Halbtangenten:*

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \arg \frac{\dot{\gamma}_2(0)}{\dot{\gamma}_1(0)} = \arg \dot{\gamma}_2(0) - \arg \dot{\gamma}_1(0) \,.$$

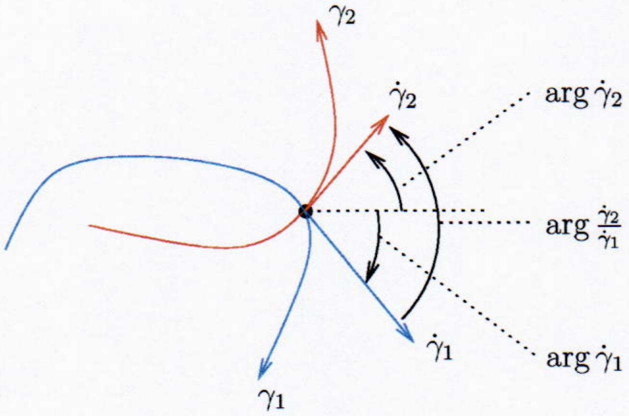

Abbildung 10.3. Der orientierte Winkel zwischen zwei Kurven.

Bemerkungen.

i) Der orientierte Winkel ist nur bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2π bestimmt.

ii) Die Voraussetzung $\dot\gamma(0) \neq 0$ ist wesentlich, um $\arg\dot\gamma$ überhaupt definieren zu können.

iii) Ist f differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$, so folgt aus $f'(z_0) \neq 0$ für eine Funktion $w(t) = f(\gamma(t))$, γ wie oben,

$$\dot w(t)_{|t=0} = f'(\gamma(t))\dot\gamma(t)_{|t=0} \, .$$

Sind γ_1, γ_2 zwei Kurven nach Definition 10.1, so gilt also für die Bildkurven $w_i = f \circ \gamma_i$, $i = 1, 2$, (vgl. Abbildung 10.4

$$\arg\frac{\dot w_2(0)}{\dot w_1(0)} = \frac{f'(z_0)\dot\gamma_2(0)}{f'(z_0)\dot\gamma_1(0)} = \arg\frac{\dot\gamma_2(0)}{\dot\gamma_1(0)} \, .$$

Satz 10.2.

Ist f differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f'(z_0) \neq 0$, so ist f in z_0 orientierungs- und winkeltreu (konform), d.h. die Bildkurven $w_1(t)$, $w_2(t)$ zweier Kurven $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ (nach Definition 10.1) schneiden sich in $f(z_0)$ unter dem gleichen orientierten Winkel wie γ_1, γ_2 in z_0.

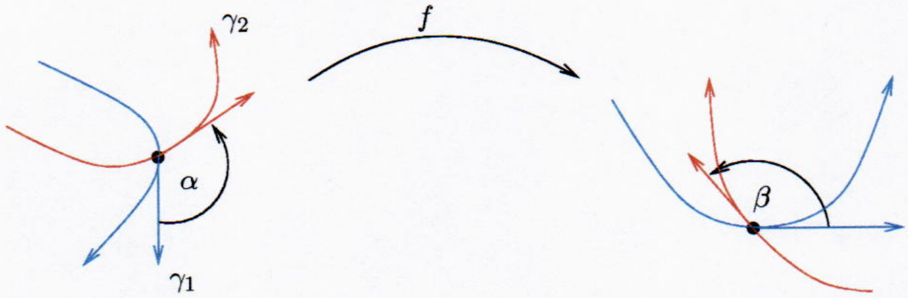

Abbildung 10.4. $\alpha = \beta$.

Bemerkungen.

i) Orientierungs- und winkeltreue Abbildungen korrespondieren mit biholomorphen Abbildungen (d.h.: $f\colon U \to V$, $U, V \subset \mathbb{C}$ offen, f bijektiv, f, f^{-1} holomorph).

ii) Eine Abbildung $f\colon U \to V$ ist genau dann biholomorph, wenn gilt: f ist holomorph, bijektiv, f^{-1} ist stetig, und auf ganz U ist $f'(z) \neq 0$. Dann ist

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} \quad \text{mit} \;\; w = f(z)\,.$$

Wie sieht es i.A. mit der Existenz einer Umkehrfunktion aus?

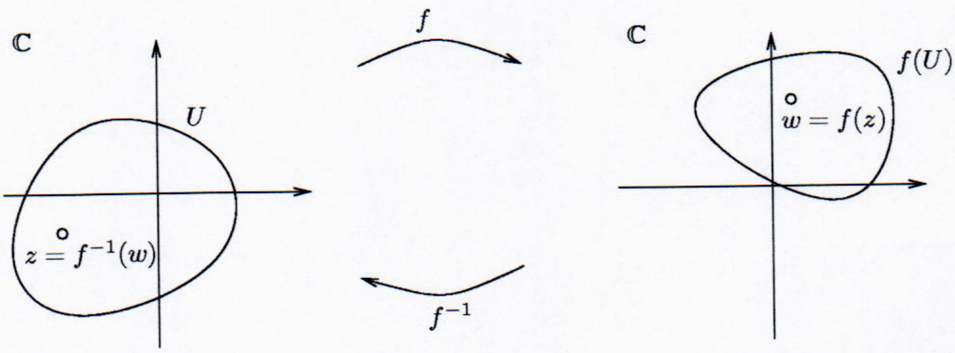

Abbildung 10.5. Zur Existenz einer Umkehrfunktion.

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon U \to f(U) \subset \mathbb{C}$. Gibt es zu jedem $w \in f(U)$

genau ein $z \in U$ mit $f(z) = w$, so heißt f bekanntlich eine eineindeutige (bijektive) Abbildung auf $f(U)$, es existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon w \in f(U) \mapsto z$ mit $f(z) = w$.

Beispiele.

i) Es sei $f(z) = az + b$, $\mathbb{C} \ni a \neq 0$, $U = \mathbb{C}$. Dann ist

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{a}(w - b)\,, \qquad f(U) = \mathbb{C}\,.$$

ii) Man betrachte jetzt die Funktion

$$f(z) = z^2 \quad \text{auf } U = \mathbb{C}\,.$$

Ist $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, so gilt $f(z_1) = f(z_2) = 1$, die Funktion ist nicht eineindeutig, es existiert keine Umkehrfunktion.

Idee. Man schränkt den Definitionsbereich ein, man betrachtet etwa

$$f(z) = z^2 \quad \text{auf } U := \{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\, z > 0\}\,.$$

Auf U eingeschränkt ist f eineindeutig, die Wertemenge ist die aufgeschnittene komplexe Ebene

$$f(U) = \{w \in \mathbb{C}:\ w = re^{i\varphi} \text{ mit } 0 < r < \infty,\ -\pi < \varphi < \pi\}\,.$$

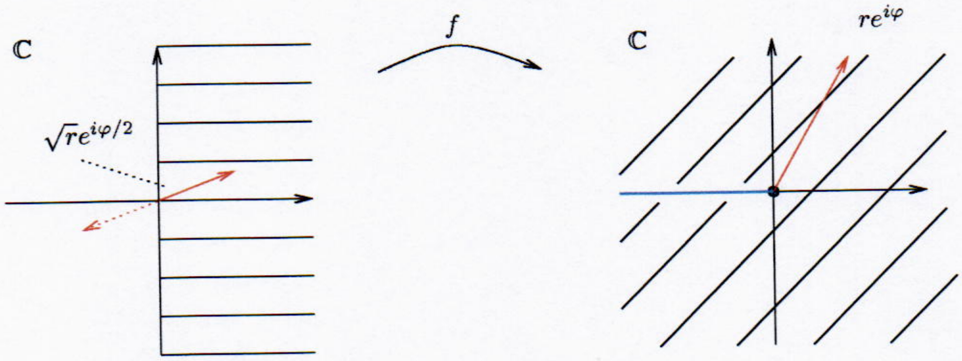

Abbildung 10.6. Zur Hauptwert der Wurzelfunktion.

Zur Eineindeutigkeit beachte man: Ist

$$w = re^{i\varphi}\ , \quad r > 0\ , \quad -\pi < \varphi < \pi\ ,$$

$$z = \rho e^{i\theta}\ , \quad \rho > 0\ , \qquad -\tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{\pi}{2}\ ,$$

und ist $w = z^2$, so folgt

$$r^{i\varphi} = \rho^2 e^{i2\theta}\ , \qquad \text{d.h.} \quad \rho = \sqrt{r}\ , \quad \theta = \frac{\varphi}{2}\ .$$

Dabei ist θ eindeutig bestimmt durch die Definition von U, die Lösung $\theta = \frac{\varphi}{2} + \pi$ ist nicht zulässig.

Für $w = re^{i\varphi}$ aus der aufgeschnittenen komplexen Ebene ist die Umkehrfunktion von $f(z) = z^2$ also gegeben durch

$$f^{-1}(w) = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}\ .$$

Der so definierte Wert $f^{-1}(w)$ heißt der Hauptwert von $\sqrt{w}$, der nicht für $w = 0$ und nicht für negative reelle w definiert ist.

iii) Es sei

$$f(z) = e^z \quad \text{auf } U = \mathbb{C}\ .$$

Dann ist $f(U) = \mathbb{C} - \{0\}$. Mit

$$w = re^{i\varphi}\ , \quad r > 0\ , \quad 0 \le \varphi < 2\pi\ ,$$
$$z = x + iy$$

folgt aus $w = re^{i\varphi} = f(z)$

$$re^{i\varphi} = e^x e^{iy}\ ,$$

also

$$x = \ln(r) = \ln(|w|)\ , \qquad r > 0\ ,$$
$$y = \varphi + 2\pi k\ , \qquad k \in \mathbb{Z}\ , \quad 0 \le \varphi < 2\pi\ .$$

Alle Punkte der Form $z_k = \ln(r) + i(\varphi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, werden unter f auf $w = re^{i\varphi}$ abgebildet, f ist nicht eineindeutig, jeder Streifen der Breite 2π in der z-Ebene parallel zur reellen Achse wird auf die w-Ebene ohne $w = 0$ abgebildet.

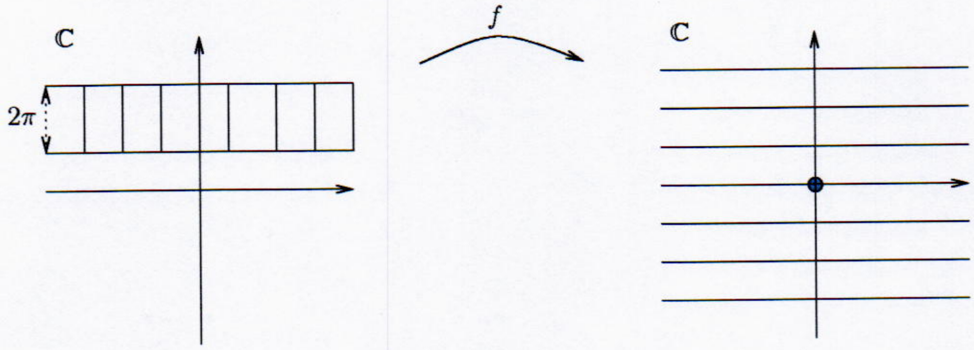

Abbildung 10.7. Zum komplexen Logarithmus.

Die Menge der Urbilder von $w = re^{i\varphi}$, $r > 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$, heißt komplexer Logarithmus von w:

$$\{\ln(w)\} = \{z \in \mathbb{C} : \ z = \ln(r) + i(\varphi + 2\pi k), \ k \in \mathbb{Z}\} .$$

Zu beachten ist: $\{\ln(w)\}$ ist keine Funktion, es ist wieder eine Einschränkung des Definitionsbereichs notwendig. Dazu betrachtet man

$$f(z) = e^z \quad \text{auf } U := \{z \in \mathbb{C} : \ -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} .$$

Dann ist $f(z)$ eineindeutig auf U mit $f(U)$ der längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen komplexen Ebene.

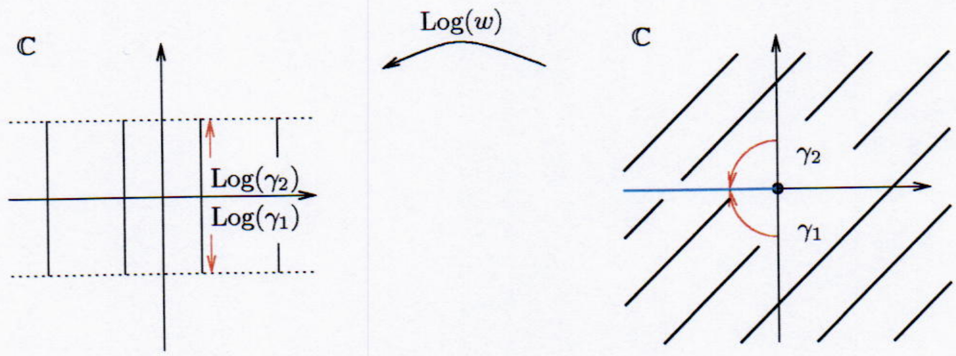

Abbildung 10.8. Zum “Sprung” des Logarithmus.

Die Funktion $f^{-1}(w) = \ln(r) + i\varphi$ für $w = re^{i\varphi}$, $r > 0$, $-\pi < \varphi < \pi$ heißt der Hauptwert $\mathrm{Log}(w)$ des Logarithmus von w.

Zu beachten ist der in der Abbildung angedeutete Sprung!

27

05.02.04

Bemerkungen.

a) Für reelles $w \in \mathbb{R}$, $w > 0$, ist $\mathrm{Log}(w) = \ln(w)$.

b) Es ist $\mathrm{Log}(i) = i\pi/2$.

iv) Mit Hilfe von Logarithmus und Exponentialfunktion lassen sich allgemeine Potenzen z^a definieren. Dazu sei $a \in \mathbb{C}$ fixiert. Die a^{te} Potenz von $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ ist

$$\begin{aligned}\{w^a\} &:= \{z \in \mathbb{C} : \ z = e^{a[\ln(|w|)+i(\arg w + 2\pi k)]},\ k \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{z \in \mathbb{C} : \ z = e^{a \log(w)}\}\,.\end{aligned}$$

Wieder ist $\{w^a\}$ keine Funktion, der Hauptwert ist gegeben durch

$$w^a = e^{a\mathrm{Log}(w)} = e^{a[\ln(w)+i\arg w]}\,, \qquad -\pi < \arg w < \pi\,.$$

Beispiele.

a) Ist w reell, $w > 0$, so ist der Hauptwert (wie in der reellen Definition)

$$w^a = e^{a\mathrm{Log(w)}} = e^{a\ln(w)}\,.$$

b) Es ist

$$\{i^4\} = \{e^{4i((\pi/2)+2\pi k)},\ k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{i(2\pi+8\pi k)},\ k \in \mathbb{Z}\} = \{1\}\,.$$

c) Es ist (reell)

$$\{i^i\} = \{e^{ii((\pi/2)+2\pi k)},\ k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{-((\pi/2)+2\pi k)},\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

d) Es ist (vgl. Abbildung 10.9)

$$\begin{aligned}\{i^{\frac{1}{2}}\} &= \{e^{\frac{1}{2}i((\pi/2)+2\pi k)},\ k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{i((\pi/4)+\pi k)},\ k \in \mathbb{Z}\}\\ &= \Big\{\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i), -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)\Big\}\,.\end{aligned}$$

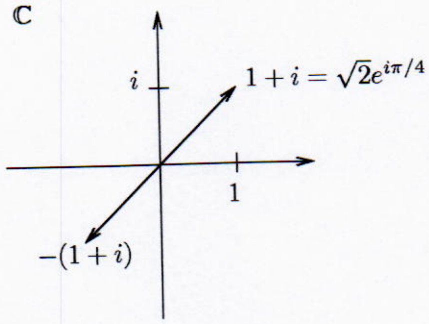

Abbildung 10.9. $i^{1/2}$.