Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Nina Becker

Tag 1, Thema 1
Aussagenlogik & Mengentheorie
Blockkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

$i)$ Kapitel 1.1 "Heuristische Aussagenlehre"

$ii)$ Kapitel 2.1 "Mengen"

Übungen

Aufgabe 1. Es seien A, B, C Aussagen. Für welche Kombinationen von $w(A)$, $w(B)$, $w(C)$ gilt:

Es sind $w(A \Leftrightarrow B)$ und $w(A \Rightarrow C)$ richtig, $w(B \vee C)$ ist ebenfalls richtig.

Aufgabe 2. Man betrachte die Aussagen

$$i) \quad \exists t \in \mathbb{R} : \quad \Big[\forall s \in \mathbb{R} : \quad \big[\forall p \in \mathbb{R} \ \text{ gilt } \ s = p + t\big]\Big] \, ,$$

$$ii) \quad \forall s \in \mathbb{R} : \quad \Big[\forall p \in \mathbb{R} : \quad \big[\exists t \in \mathbb{R} \ \text{ sodass } \ s = p + t\big]\Big] \, .$$

Sind die Aussagen wahr oder falsch? Bestimmen Sie jeweils die Negation der Aussage.

Aufgabe 3. Es seien X eine beliebige Menge und

$$\begin{array}{llll} S_1 = \{\{\emptyset\}, \{X\}, X\}, & S_2 = X, & S_3 = \{X\}, & S_4 = \{X, \{X\}\} \\ S_5 = \emptyset, & S_6 = \{\emptyset\}, & S_7 = \{\{\emptyset\}\}, & S_8 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}. \end{array}$$

$i)$ Welche der Mengen $S_1, \ldots, S_8$ ist Element in einer der Mengen $S_1, \ldots, S_8$?

$ii)$ Welche der Mengen $S_1, \ldots, S_8$ ist Teilmenge von einer der Mengen $S_1, \ldots, S_8$?

Aufgabe 4. Es seien X, Y, Z beliebige Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

i) $X - (Y \cap Z) = (X - Y) \cup (X - Z)$

ii) $(X \cup Y) - Z = X \cup (Y - Z)$

Zusatzaufgabe

i) Es seien A und B Aussagen. Verifizieren Sie anhand einer Wahrheitstafel:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)\ .$$

ii) Es seien A und B zwei Aussagen. Zeigen Sie:

Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn $A \wedge (\neg B)$ falsch ist. (In dieser Form spricht man auch von einem *Widerspruchsbeweis.*)

iii) Zeigen Sie als Anwendung: $\sqrt{2}$ kann keine Bruchzahl sein.

Hinweis. Nehmen Sie für $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ an $(p/q)^2 = 2$. Schließen Sie, dass es dann auch teilerfremde $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $(m/n)^2 = 2$. Zeigen Sie im Widerspruch dazu, dass 2 ein gemeinsamer Teiler von m und n ist.