Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Nina Becker

Lösungen
Tag 1, Thema 1
Aussagenlogik & Mengentheorie
Blockkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Aufgabe 1. Die Wahrheitstafel liefert zwei mögliche Kombinationen der Wahrheitswerte:

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(A \Leftrightarrow B)$	$w(A \Rightarrow C)$	$w(B \vee C)$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	0	0	1	1	0

Die Lösungen zu "erraten" kann zwar zum richtigen Ergebnis führen, ist jedoch nicht erwünscht, denn es ist wichtig die anderen potentiell richtigen Kombinationen auszuschließen.

Aufgabe 2. Unschön formuliert, soll man alle Quantoren tauschen ("$\exists$" zu "$\forall$" und umgekehrt) und die Gleichung negieren.

i) Die Aussage bedeutet in Worten: Es gibt eine reelle Zahl t sodass für alle reellen Zahlen s und p gilt: $s - p = t$. Diese Aussage ist offensichtlich falsch.

Für die Negation gilt

$$\begin{aligned}
&\neg\Big[\exists t \in \mathbb{R}\colon \big[\forall s \in \mathbb{R}\colon [\forall p \in \mathbb{R}\colon s = p + t]\big]\Big]\\
\Leftrightarrow\ &\forall t \in \mathbb{R}\colon \neg\big[\forall s \in \mathbb{R}\colon [\forall p \in \mathbb{R}\colon s = p + t]\big]\\
\Leftrightarrow\ &\forall t \in \mathbb{R}\colon \big[\exists s \in \mathbb{R}\colon \neg[\forall p \in \mathbb{R}\colon s = p + t]\big]\\
\Leftrightarrow\ &\forall t \in \mathbb{R}\colon \big[\exists s \in \mathbb{R}\colon [\exists p \in \mathbb{R}\colon s \neq p + t]\big]
\end{aligned}$$

(in Worten: für alle reellen Zahlen t gibt es reelle Zahlen s und p, deren Differenz nicht t ist.)

ii) Die Aussage bedeutet in Worten: Für alle reellen Zahlen s und p gilt: es gibt eine reelle Zahl t mit der Eigenschaft $s - p = t$. Diese Aussage ist richtig.

Für die Negation gilt

$$\begin{aligned}
&\neg\Big[\forall s \in \mathbb{R}\colon \big[\forall p \in \mathbb{R}\colon [\exists t \in \mathbb{R}\colon s = p + t]\big]\Big]\\
\Leftrightarrow\ &\exists s \in \mathbb{R}\colon \neg\big[\forall p \in \mathbb{R}\colon [\exists t \in \mathbb{R}\colon s = p + t]\big]\\
\Leftrightarrow\ &\exists s \in \mathbb{R}\colon \big[\exists p \in \mathbb{R}\colon \neg[\exists t \in \mathbb{R}\colon s = p + t]\big]\\
\Leftrightarrow\ &\exists s \in \mathbb{R}\colon \big[\exists p \in \mathbb{R}\colon [\forall t \in \mathbb{R}\colon s \neq p + t]\big]
\end{aligned}$$

(in Worten: es gibt reelle Zahlen s und p mit der Eigenschaft dass alle rellen Zahlen t nicht gleich der Differenz $s - p$ sind.)

Aufgabe 3.

i) Beachte, dass eine Menge von einem Element, nicht das Element selbst ist, also $X \neq \{X\}$ und $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Somit ist beispielsweise $S_5 \notin S_1$.

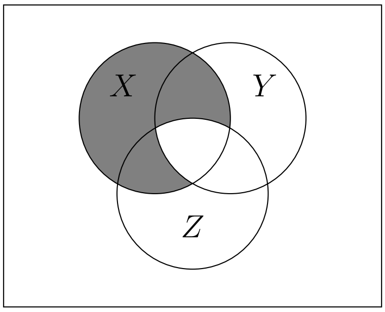
$$\begin{aligned}
&S_2 \in S_1, S_3, S_4,\\
&S_3 \in S_1, S_4,\\
&S_5 \in S_6, S_8,\\
&S_6 \in S_1, S_7,
\end{aligned}$$

ii) Beachte, dass die leere Menge $\emptyset = \{\}$ eine Teilmenge jeder Menge ist.

$$\begin{aligned}
&S_3 \subseteq S_1, S_4,\\
&S_4 \subseteq S_1,\\
&S_5 \subseteq S_1, \ldots, S_8,\\
&S_6 \subseteq S_8,\\
&S_7 \subseteq S_1, S_8.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Bei solcher Art von Aufgabe ist es in der Regel nicht ausreichend ein Venn-Diagramm zu zeichnen, kann jedoch sehr hilfreich sein. Durch ein Diagramm erhält man eine "Vorahnung", ob die Aussage stimmt oder nicht. Ist die Aussage falsch, dann benötigt man ein Gegenbeispiel, gerne mit konkreten Zahlen/Mengen (siehe (ii)). Ist die Aussage jedoch richtig, so bedient man sich meist dem formalen Beweis. Hierfür nimmt man sich ein Element aus der ersten Menge und formt um, bis es ein Element der zweiten Menge ist (siehe (i)).

i)

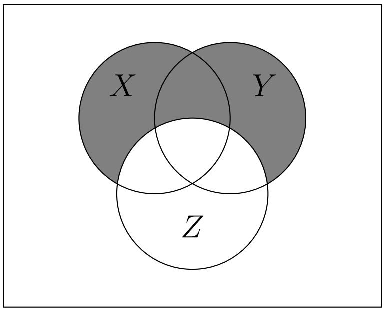


$X - (Y \cap Z) = (X - Y) \cup (X - Z)$

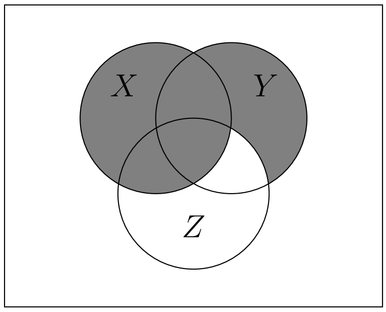
Es gilt:

$$\begin{aligned}
& x \in X - (Y \cap Z) \\
\Leftrightarrow\ & x \in X \wedge x \notin (Y \cap Z) \\
\Leftrightarrow\ & x \in X \wedge \big((x \notin Y \vee x \notin Z)\big) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in X \wedge x \notin Y) \vee (x \in X \wedge x \notin Z) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in X - Y) \vee (x \in X - Z) \\
\Leftrightarrow\ & x \in (X - Y) \cup (X - Z)
\end{aligned}$$

ii)



$(X \cup Y) - Z$



$X \cup (Y - Z)$

Gegenbeispiel: Setze $X = \{1\}$, $Y = \{1, 2\}$ und $Z = \{1, 2, 3\}$.

Dann gilt

$$(X \cup Y) - Z = \big(\{1\} \cup \{1, 2\}\big) - \{1, 2, 3\} = \{1, 2\} - \{1, 2, 3\} = \emptyset,$$

aber

$$X \cup (Y - Z) = \{1\} \cup \big(\{1, 2\} - \{1, 2, 3\}\big) = \{1\} \cup \emptyset = \{1\}.$$

Zusatzaufgabe

i) Man betrachtet Tabelle 1 und folgert aus den letzten beiden Spalten, dass die Aussage $A \Rightarrow B$ immer denselben Wahrheitswert hat wie $\neg B \Rightarrow \neg A$.

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg B)$	$w(\neg A)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Tabelle 1: Zu $\neg B \Rightarrow \neg A$.

ii) Nun betrachte man Tabelle 2:

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg B)$	$A \wedge (\neg B)$	$A \Rightarrow B$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

Tabelle 2: Zu $A \wedge (\neg B)$.

iii) Es sei A die Aussage „$x^2 = 2$“ (A ist wahr als Definition von $\sqrt{2}$). Weiter sei B die Aussage „x ist keine Bruchzahl.“

Damit ist zu zeigen: $A \Rightarrow B$ oder äquivalent dazu $A \wedge (\neg B)$ ist falsch.

Die Aussage $\neg B$ lautet „x ist eine Bruchzahl“ oder äquivalent nach evtl. Kürzen:

$$\text{Es existieren teilerfremde } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ mit:} \quad x = \frac{p}{q}\ .$$

Aus A folgt

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{und damit} \quad p^2 = 2q^2\ ,$$

also ist p^2 eine gerade Zahl.

Wie oben bereits gesehen, ist dann auch p gerade, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p = 2n$.

Somit ist $4n^2 = p^2 = 2q^2$ und folglich $q^2 = 2n^2$.

Man erkennt, dass q^2 und als Konsequenz wieder q selbst durch 2 teilbar ist.

Folglich sind p und q nicht teilerfremd, $A \wedge (\neg B)$ ist falsch, was zu beweisen war. $\square$