Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Nina Becker

Lösungen
Tag 1, Thema 2
Funktionen
Blockkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Aufgabe 1. Bemerkung: Eine injektive Abbildung zwischen zwei gleichmächtigen endlichen Mengen ist automatisch surjektiv und damit bijektiv (evtl. als Zusatz in der Präsenzübung).

i) Es gibt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$ Abbildungen $A \to B$. Davon sind $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ Stück injektiv/surjektiv/bijektiv.

ii) Es gibt $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 48$ Abbildungen $A \to C$. Davon sind $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Stück injektiv. Eine surjektive/bijektive Abbildung $A \to C$ kann es nicht geben, da A weniger Elemente als C hat.

iii) Es gibt $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ Abbildungen $C \to B$. Davon sind $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 36$ Stück surjektiv. Eine injektive/bijektive Abbildung $C \to B$ kann es nicht geben, da C mehr Elemente als B hat.

iv) Eine Bijektion $D \to \mathbb{N}$ ist gegeben durch die Vorschrift $m \mapsto m/2$ (nachrechnen!).

Aufgabe 2.

i) Bei dieser Aufgabe kann es hilfreich sein, sich zunächst die Funktion zu zeichnen

(a) $A = \mathbb{R}$, $B = [2, \infty)$.
(b) $A = [1, \infty)$, $B = \mathbb{R}$.
(c) $A = [1, \infty)$, $B = [2, \infty)$.
(d) $A = [0, 2]$, $B = \mathbb{R}$.

ii) Wie schon auf dem ersten Blatt bedeutet widerlegen ein Gegenbeispiel anzugeben. Ist die Aussage jedoch richtig, so muss diese bewiesen werden (dafür ist nur ein Beispiel anzugeben nicht ausreichend!).

(a) Man argumentiere mit den Eigenschaften „injektiv" und „surjektiv" oder wegen der Existenz von f^{-1} und g^{-1}

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = id\,, \quad \text{d.h. } (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}\,.$$

(b) Dies folgt direkt aus $\text{bild}(f \circ g) \subset \text{bild}(f)$.

(c) Man betrachte beispielsweise die injektive Funktion

$$g\colon \{1,2\} \mapsto \{1,2,3\} \text{ mit } g(1) = 1,\ g(2) = 2$$

sowie

$$f\colon \{1,2,3\} \mapsto \{1,2\} \text{ mit } f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 1.$$

Es ist

$$f \circ g\colon \{1,2\} \to \{1,2\}, \quad (f \circ g)(1) = 1, \quad (f \circ g)(2) = 2,$$

bijektiv, die Funktion f ist aber nicht injektiv.

Aufgabe 3.

i) Für alle $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt $f(n,m) = f(m,n)$, sodass f nicht injektiv ist. Außerdem ist $1 \notin f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, sodass f auch nicht surjektiv ist.

ii) Bemerke zunächst, dass

$$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3x-1)}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$. Nun seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ mit $f(x) = f(y)$, also

$$\frac{5}{3(3x-1)} = \frac{5}{3(3y-1)} \Leftrightarrow 3x - 1 = 3y - 1 \Leftrightarrow x = y,$$

sodass f injektiv ist. Außerdem ist $5/3(3x-1) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$, sodass $2/3 \notin f(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\})$ und damit ist f nicht surjektiv.

iii) Die Funktion f ist offensichtlich injektiv, wegen $1 \notin f(\mathbb{N})$ aber nicht surjektiv.

iv) Die Funktion f ist offensichtlich injektiv, und für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $f(n-1) = n$, sodass f bijektiv mit Umkehrabbildung $m \mapsto m - 1$ ist.

v) Für $x, y \in (0, \infty)$ gilt

$$x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y| \Leftrightarrow x = y,$$

sodass f injektiv ist. Außerdem gilt $f(1/\sqrt{x}) = x$, sodass f bijektiv mit Umkehrabbildung $y \mapsto 1/\sqrt{y}$ ist.

(Alternativ: f ist auf $(0, \infty)$ streng monoton fallend).