Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Nina Becker

Lösungen
Tag 2, Thema 1
Induktion
Blockkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Aufgabe 1. Die Induktion besteht aus den drei Abschnitten Induktionsanfang (I.A), Induktionsannahme bzw. Induktionsvoraussetzung (I.V) und Induktionsschritt (I.S). Auch der Induktionsanfang und die Induktionsvoraussetzung geben in einer Klausur Punkte.

i) Beachte $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\} \neq \{0, 1, 2, ...\}$. Das bedeutet, der Induktionsanfang ist für $n = 1$ zu zeigen.

I.A.: Es gilt

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2-1 = 1 = 1^2,$$

sodass die Aussage für $n = 1$ richtig ist.

I.V.: Für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \ .$$

I.S.: Es ist nach der I.V.

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \ . \quad \square$$

ii) I.A.: Es gilt

$$\sum_{k=0}^{1}\frac{k+1}{2^k} = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} = 1 + 1 = 2 = 4 - \frac{4}{2} = 4 - \frac{1+3}{2^1},$$

sodass die Aussage für $n = 1$ richtig ist.

I.V.: Für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{2^k} = 4 - \frac{n+3}{2^n} \ .$$

I.S.: Es ist nach der I.V.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{k+1}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{2^k}+\frac{n+2}{2^{n+1}}\\ &= 4-\frac{n+3}{2^n}+\frac{n+2}{2^{n+1}}\\ &= 4-\left[\frac{2n+6-n-2}{2^{n+1}}\right]\\ &= 4-\frac{n+4}{2^{n+1}}=4-\frac{(n+1)+3}{2^{n+1}}\,. \quad\square\end{aligned}$$

iii) I.A.: Es gilt

$$\prod_{k=2}^{2}\frac{k-1}{k+1}=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{2}{2^2+2},$$

sodass die Aussage für $n=2$ richtig ist.

I.V.: Für ein beliebiges, festes $n \geq 2$ gilt

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{n^2+n}\,.$$

I.S.: Es ist nach der I.V.

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n+1}\frac{k-1}{k+1} &= \prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\\ &= \frac{2}{n^2+n}\cdot\frac{n}{n+2}\\ &= \frac{2n}{n(n^2+3n+2)} = \frac{2}{(n+1)^2+(n+1)}\,. \quad\square\end{aligned}$$

iv) I.A. Da $5^1-1=4$ durch 4 teilbar ist, ist der Induktionsanfang für $n=1$ gezeigt.

I.V.: Als Induktionsannahme für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ sei nun 5^n-1 durch 4 teilbar.

I.S.: Somit ist wegen

$$5^{n+1}-1=5\cdot 5^n-1=4\cdot 5^n+5^n-1$$

auch $5^{n+1}-1$ durch 4 teilbar und der Induktionsschluss ist verifiziert. $\square$

v) *Beobachtung. Durch ausprobieren erkennt man, dass die Aussage nicht für $n = 1$ und $n = 2$ gelten kann.*

Der Induktionsanfang muss aber ähnlich wie in iii) nicht bei $n = 1$ gemacht werden.

Kann der Induktionsanfang beispielsweise für $n = 3$ verifiziert werden und ist der Induktionsschluss ab dieser Zahl richtig, so gilt die Aussage für alle $n \geq 3$.

I.A.: Für $n = 3$ rechnet man die Behauptung sofort nach.

I.V.: Die Aussage gelte nun für ein $n \geq 3$.

I.S.: Es folgt

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \geq (2n+1) + 2n + 1 \\ &= 2(n+1) + 2n \geq 2(n+1) + 1\ ,\end{aligned}$$

die Aussage $A(n+1)$ folgt also aus der Induktionsannahme und die Behauptung ist bewiesen. □

vi) Es sei $A(n)$ die Aussage

$$n! \geq 2^n.$$

Induktionsanfang: (Beweis von $A(4)$)

Es ist

$$4! = 24 \geq 16 = 2^4,$$

sodass $A(4)$ richtig ist.

Induktionsschritt: ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$A(n): \quad n! \geq 2^n$$

die **Induktionsbehauptung**

$$A(n+1): \quad (n+1)! \geq 2^{n+1}$$

impliziert. Es gilt

$$(n+1)! = (n+1)n! \overset{I.V.}{\geq} \underbrace{(n+1)}_{\geq 5} 2^n \geq 2^{n+1}.$$

Damit ist $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

vii) Es sei $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=2}^{n-1} \binom{k}{2} = \binom{n}{3}.$$

Induktionsanfang: (Beweis von $A(3)$)

Es ist

$$\sum_{k=2}^{2}\binom{k}{2}=\binom{2}{2}=1=\binom{3}{3},$$

sodass $A(3)$ richtig ist.

Induktionsschritt: $(A(n)\Rightarrow A(n+1))$

Sei $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 3$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$A(n)\colon\quad \sum_{k=2}^{n-1}\binom{k}{2}=\binom{n}{3}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$A(n+1)\colon\quad \sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3}$$

impliziert. Mit der aus der Vorlesung bekannten Rekursionsformel

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$$

erhalten wir

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\sum_{k=2}^{n-1}\binom{k}{2}+\binom{n}{2}\overset{I.V.}{=}\binom{n}{3}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}.$$

Damit ist $A(n)\Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

viii) Es sei $A(n)$ die Aussage

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Induktionsanfang: (Beweis von $A(1)$)

Es ist

$$\prod_{k=1}^{1}(2k-1)=1=\frac{2}{2}=\frac{(2\cdot 1)!}{2^1\cdot 1!}$$

sodass $A(1)$ richtig ist.

Induktionsschritt: $(A(n)\Rightarrow A(n+1))$

Sei $n\in\mathbb{N}$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$A(n)\colon\quad \prod_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$A(n+1)\colon\quad \prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)=\frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}(n+1)!}$$

impliziert. Es gilt

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \prod_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot(2n+1)\\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!}\cdot(2n+1) \qquad \text{(I.V.)}\\ &= \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{2^n n!(2n+2)}\\ &= \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}(n+1)!}.\end{aligned}$$

Damit ist $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

$ix)$ Es sei $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

Induktionsanfang: (Beweis von $A(1)$)

Es ist

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{1} = 1 < 2 = 2\sqrt{1}$$

sodass $A(1)$ richtig ist.

Induktionsschritt: ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$A(n): \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$A(n+1): \qquad \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n+1}$$

impliziert. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\\ &< 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad \text{(I.V.)}\\ &= \frac{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}}\\ &\leq \frac{n+n+1+1}{\sqrt{n+1}} \qquad \text{(Hinweis)}\\ &= \frac{2(n+1)}{\sqrt{n+1}}\\ &= 2\sqrt{n+1}.\end{aligned}$$

Damit ist $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

$x)$ Es sei $A(n)$ die Aussage

$$(k-1) \mid k^n - 1.$$

Induktionsanfang: (Beweis von $A(1)$)

Es ist

$$k^1 - 1 = k - 1$$

durch $(k-1)$ teilbar, sodass $A(1)$ richtig ist.

Induktionsschritt: $(A(n) \Rightarrow A(n+1))$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$A(n): \quad (k-1) \mid k^n - 1$$

die **Induktionsbehauptung**

$$A(n+1): \quad (k-1) \mid k^{n+1} - 1$$

impliziert. Es gilt

$$k^{n+1} - 1 = k^{n+1} - k + k - 1 = k(k^n - 1) + k - 1.$$

Da $k-1$ trivialerweise durch $k-1$ teilbar ist und nach Induktionsvoraussetzung $(k-1) \mid k^n - 1$ gilt, folgt dass $(k-1) \mid k^{n+1} - 1$. Damit ist $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.