

Lösungen
Tag 2, Thema 3
Körper
Blockkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Aufgabe 1. Nach den Tabellen

$$\begin{array}{c|cc} + & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \end{array} \quad \text{sowie} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & \mathbf{1} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \end{array}$$

ist

$$0 + 0 = 0, \quad \mathbf{1} + 0 = 0 + \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1} + \mathbf{1} = 0$$

und

$$0 \cdot 0 = 0, \quad \mathbf{1} \cdot 0 = 0 \cdot \mathbf{1} = 0, \quad \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1},$$

Das additive Inverse der 1 ist also die 1 selbst, das multiplikative Inverse der 1 ist ebenfalls die 1, die gleichzeitig das neutrale Element bzgl. der Multiplikation ist. Das neutrale Element der Addition ist die 0 und $(M, +)$ und (M, \cdot) sind kommutative Gruppen. Außerdem erkennt man aus den obigen Rechnung, dass das Distributivgesetz gilt. Insgesamt ist also $(M, +, \cdot)$ ein Körper.

Aufgabe 2. Wir erkennen aus der Verknüpfungstabelle, dass $(M, *_4)$ kein eindeutiges neutrales Element hat (es gilt $2 *_4 1 = 2 *_4 3 = 2$) und dass 2 in $(M, *_4)$ kein inverses Element besitzt. Also ist $(M, +_4)$ keine Gruppe, sodass $(M, +_4, *_4)$ kein Körper ist.