Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Nina Becker

Lösungen
Tag 3, Thema 1
Reelle Zahlen & Funktionen
Blockkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Aufgabe 1.

- Die Menge M_1 ist als Vereinigung beschränkter Intervalle nach oben und nach unten beschränkt, also beschränkt. Es gilt

$$\inf M_1 = a, \quad \sup M_1 = \max M_1 = c,$$

ein Minimum von M_1 existiert nicht (das Infimum a ist nicht Element von M_1).

- Die Menge M_2 ist nicht nach oben beschränkt, also auch nicht beschränkt, da die unbeschränkte Menge

$$\left\{\frac{1}{2m} + 2m \colon m \in \mathbb{N}\right\}$$

Teilmenge von M_2 ist. Außerdem gilt

$$2m + 3 - \frac{1}{2m+3} > 2m + 1 - \frac{1}{2m+1}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$, sodass M_2 nach unten beschränkt ist mit

$$\inf M_2 = \min M_2 = (-1)^1 \frac{1}{1} + 1 = 0.$$

- Ist $x < 0$, so ist

$$\frac{1}{x} < 0 < \frac{1}{x^2},$$

sodass $M_3 \subseteq (0, \infty)$. Für $x > 0$ gilt nun

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x > 1,$$

sodass $M_3 = (1, \infty)$ nicht nach oben beschränkt, also auch nicht beschränkt, aber nach unten beschränkt ist mit $\inf M_3 = 1$. Das Infimum 1 ist aber nicht Element von M_3, sodass kein Minimum exisitert.

- Es ist $M_4 = (\mathbb{R} - \{0\}) - M_3 = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$ nicht nach unten beschränkt, also auch nicht beschränkt, aber nach oben beschränkt mit

$$\sup M_4 = \max M_4 = 1.$$

- Die Menge M_5 ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x-2| < |x+1|.$$

Ist $x < -1$, so ist

$$2 - x < -x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < -1,$$

ein Widerspruch. Ist $-1 \leq x < 2$, so ist

$$2 - x < x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < x.$$

Ist $x \geq 2$, so ist

$$x - 2 < x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < 1,$$

was immer erfüllt ist. Insgesamt gilt also $M_5 = (\frac{1}{2}, \infty)$, sodass M_5 nicht nach oben beschränkt, also auch nicht beschränkt, aber nach unten beschränkt ist mit $\inf M_5 = \frac{1}{2}$. Das Infimum $\frac{1}{2}$ ist aber nicht Element von M_5, sodass kein Minimum exisitert.

- Es ist $M_6 = \text{bild}(\exp) = (0, \infty)$ nicht nach oben beschränkt, also auch nicht beschränkt, aber nach unten beschränkt mit $\inf M_6 = 0$. Das Infimum 0 ist aber nicht Element von M_6, sodass kein Minimum exisitert.

- Die Funktion exp ist (streng) monoton wachsend, sodass

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow \exp(-1) \leq \exp(x) \leq \exp(1),$$

also ist M_7 nach oben und nach unten beschränkt, also beschränkt mit

$$\inf M_7 = \min M_7 = \frac{1}{\mathrm{e}}, \quad \sup M_7 = \max M_7 = \mathrm{e}.$$

- Für alle $x \in (0, 1)$ gilt

$$-1 \leq \sin(1/x) \leq 1,$$

sodass -1 eine untere und 1 eine obere Schranke für M_8 sind. Die Menge M_8 ist also nach oben und nach unten beschränkt, also beschränkt. Für $\frac{2}{\pi}, \frac{2}{3\pi} \in (0, 1)$ gilt außerdem

$$\sin(1/(2/\pi)) = \sin(\pi/2) = 1, \quad \sin(1/(2/3\pi)) = \sin(3pi/2) = -1,$$

sodass

$$\inf M_8 = \min M_8 = -1, \quad \sup M_8 = \max M_8 = 1.$$

Aufgabe 2.

i) Ist $x \geq 1$, so ist

$$2(x-1) > 8 \Leftrightarrow x > 5,$$

ist $x < 1$, so ist

$$2(1-x) > 8 \Leftrightarrow -3 > x.$$

Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L}_1 = (-\infty, -3) \cup (5, \infty)$.

ii) Zunächst bemerken wir, dass

$$\frac{5}{5x-1} < \frac{2}{2x+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{5x-1} - \frac{2}{2x+1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{(5x-1)(2x+1)} < 0,$$

und die letzte Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn die Terme $(5x-1)$ und $(2x+1)$ unterschiedliches Vorzeichen haben. Es gilt

$$5x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{5}, \quad 5x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{5},$$
$$2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}, \quad 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{5})$.

iii) Die gegebene Ungleichung ist äquivalent zur Ungleichung

$$-3|x-4| - 2x - 4 > 0.$$

Ist $x \geq 4$, so ist

$$-3(x-4) - 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow -5x + 8 > 0 \Leftrightarrow \frac{8}{5} > x,$$

ein Widerspruch. Ist $x < 4$, so ist

$$-3(4-x) - 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x - 16 > 0 \Leftrightarrow x > 16,$$

ein Widerspruch. Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L}_3 = \emptyset$.

iv) Zunächst bemerken wir, dass

$$x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1.$$

Ist $x^2 > 1$ (also $|x| > 1$), so ist

$$\begin{aligned}
& \frac{4x-5}{x^2-1} < 5 \\
\Leftrightarrow \quad & 4x - 5 < 5x^2 - 5 \\
\Leftrightarrow \quad & 5x^2 - 4x > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(x - \frac{4}{10}\right)^2 > \frac{16}{100} \\
\Leftrightarrow \quad & x - \frac{4}{10} < -\frac{4}{10} \quad \vee \quad x - \frac{4}{10} > \frac{4}{10} \\
\Leftrightarrow \quad & x < 0 \quad \vee \quad x > \frac{4}{5},
\end{aligned}$$

sodass die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ erfüllt ist. Ist $x^2 < 1$ (also $|x| < 1$), so ist

$$\begin{aligned}
& \frac{4x-5}{x^2-1} < 5 \\
\Leftrightarrow \quad & 4x - 5 > 5x^2 - 5 \\
\Leftrightarrow \quad & 5x^2 - 4x < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(x - \frac{4}{10}\right)^2 < \frac{16}{100} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{4}{10} < x - \frac{4}{10} < \frac{4}{10} \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < x < \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L}_4 = (-\infty, -1) \cup (0, \frac{4}{5}) \cup (1, \infty)$.

v) Hier substituieren wir zunächst $u = x^2$, um die Ungleichung

$$\big||u^2 - 4| - 1\big| < 2, \quad u \in [0, \infty),$$

für u zu erhalten (vgl. Übungsblatt 4, Aufgabe 4 iii)). Ist $u \in [0, 2]$, so ist

$$\begin{aligned}
& \big||u^2 - 4| - 1\big| < 2 \\
\Leftrightarrow \quad & |3 - u^2| < 2 \\
\Leftrightarrow \quad & -2 < 3 - u^2 < 2 \\
\Leftrightarrow \quad & -5 < -u^2 < -1 \\
\Leftrightarrow \quad & 5 > u^2 > 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{5} > u > 1,
\end{aligned}$$

sodass alle $u \in (1, 2]$ die obige Ungleichung lösen. Die Rücksubstitution liefert dann

$$1 < x^2 \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x < -1 \quad \vee \quad 1 < x \leq \sqrt{2}.$$

Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L}_5 = [-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$.

vi) Es ist $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, sodass die gegebene Ungleichung geschrieben werden kann als

$$|x - 1||x - 2| < |x + 2|.$$

Ist $x < -2$, so ist

$$\begin{aligned}
& (1 - x)(2 - x) < -x - 2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 2x + 4 < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x - 1)^2 + 3 < 0,
\end{aligned}$$

ein Widerspruch. Ist $-2 \leq x < 1$, so ist

$$\begin{aligned}
& (1 - x)(2 - x) < x + 2 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 - 4x < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (x - 2)^2 < 4 \\
\Leftrightarrow \quad & -2 < x - 2 < 2 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < x < 4.
\end{aligned}$$

Ist $x \in [1,2)$, so ist

$$\begin{aligned} & (x-1)(2-x) < x+2 \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2 + 2x - 4 < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 2x + 4 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-1)^2 + 3 > 0, \end{aligned}$$

was offensichtlich für alle $x \in [1,2)$ gilt. Ist schließlich $x \geq 2$ (dieser Fall ist äquivalent zum Fall $-2 \leq x < 1$), so ist

$$(x-1)(x-2) < x+2 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$$

Die Lösungsmenge ist also $\mathbb{L}_6 = (0,1) \cup [1,2) \cup [2,4) = (0,4)$.