

Tag 3, Thema 2
Folgen
Blockkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Kapitel 8.1 "Reelle Zahlenfolgen"

Übungen

Aufgabe 1.

i) Existieren die folgenden Grenzwerte? Falls ja, so berechnen Sie diese:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \frac{1}{n^2} - \sqrt{n}}{n^{5/2} - n^2}$,

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{\sqrt{n}} - n^2}{n^3 + 2n^4} \right]$,

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 1}{\frac{n^3 + 1}{n}}$.

ii) Welche der Folgen ist beschränkt, welche unbeschränkt?

Aufgabe 2. Betrachten Sie zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$, $0 \leq b_n < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie die Folge $\{c_n\}$,

$$c_n = \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Berechnen Sie, falls existent, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ für

i) $a_n = n + 1$, $b_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

ii) $a_n = n^2 + 1$, $b_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis. Erweitern Sie mit $\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$.

Aufgabe 3. Es sei $a_n = \frac{1}{n^2 + 1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

- i) Finden Sie eine Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass die Folge $\{a_n b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.
 - ii) Finden Sie eine Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass die Folge $\{b_n/a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
-

Aufgabe 4. Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $\{a_n\}$ mit

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1 + a_n}{2 + a_n}.$$

- i) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} > \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a_n > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

- ii) Ist die Folge nach unten beschränkt? Ist die Folge monoton fallend? Konvergiert die Folge? Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.
-

Zusatzaufgabe Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte oder begründen Sie, dass der Grenzwert nicht existiert.

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}$

vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7\sqrt{n} + 1}{n}$

vii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4 + \frac{n-1}{n+1}}$ [Hinweis: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für alle $a > 0$.]

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4n + 4}{(n+1)(n+2)}$

viii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$ [Hinweis: $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ für $|x| < 1$.]

iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 3n} - n$

ix) $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-n}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-n}$

v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \sin(n^n)}{n+1}$

x) $\lim_{n \rightarrow \infty} -n(1 - (-1)^n)$