Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Nina Becker

Lösungen
Tag 3, Thema 2
Folgen
Blockkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Aufgabe 1.

i) (a) Nach Satz 8.4(ii) gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \frac{1}{n^2} - \sqrt{n}}{n^{5/2} - n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1 - \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^{3/2}})}{n^{5/2}(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^{3/2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} \\ &= 0 \cdot 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) Nach Satz 8.4(ii) gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{\sqrt{n}} - n^2}{n^3 + 2n^4}\right] &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{n^{9/2}} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n} + 2}\right] \\ &= 1 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{n^4 + 1}{\frac{n^3+1}{n}} = \frac{n^5 + n}{n^3 + 1} \geq \frac{n^5}{2n^3} = \frac{1}{2}n^2,$$

sodass die Folge unbeschränkt und damit divergent ist.

ii) Als konvergente Folgen sind die Folgen

$$\left\{\frac{n^2 - \frac{1}{n^2} - \sqrt{n}}{n^{5/2} - n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

und

$$\left\{\frac{n}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{\sqrt{n}} - n^2}{n^3 + 2n^4}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

nach Satz 8.2 beschränkt; die Folge

$$\left\{ \frac{n^4 + 1}{\frac{n^3+1}{n}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

ist wie oben gezeigt unbeschränkt.

Aufgabe 2.

i) Wegen $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (die Wurzelfunktion ist monoton wachsend) gilt

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{n}}}_{\to 0}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit dem Einschließungskriterium (Satz 8.4(iii)) folgt

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0.$$

ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen der Monotonie der Wurzelfunktion

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n} &= \frac{n^2+1-n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}} \\ &\geq \frac{n^2 - n}{2\sqrt{n+1}} \\ &\geq \frac{n^2 - n}{2\sqrt{2n^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(n-1),\end{aligned}$$

sodass die Folge nach oben unbeschränkt und damit divergent ist.

Aufgabe 3.

i) Setzt man $b_n = n(n^2+1)$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist die durch

$$c_n = a_n b_n = \frac{1}{n^2+1} \cdot n(n^2+1) = n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gegebene Folge $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt und somit nach Satz 8.2 divergent.

ii) Setzt man $b_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist die durch

$$c_n = \frac{b_n}{a_n} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gegebene Folge $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konstant und somit auch konvergent.

Aufgabe 4.

i) Aus $a_1 > 0$ und der Definition der a_n folgt unmittelbar $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man hat die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &> \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \Leftrightarrow \\
\frac{1+a_n}{2+a_n} &> \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \Leftrightarrow \\
2+2a_n &> 2\sqrt{5}-2+a_n\bigl(\sqrt{5}-1\bigr) \quad \Leftrightarrow \\
a_n\bigl(3-\sqrt{5}\bigr) &> 2\sqrt{5}-4 \quad \Leftrightarrow \\
a_n &> 2\frac{\sqrt{5}-2}{3-\sqrt{5}} = 2\frac{\bigl(\sqrt{5}-2\bigr)\bigl(3+\sqrt{5}\bigr)}{4} \quad \Leftrightarrow \\
a_n &> \frac{\sqrt{5}-1}{2} \,.
\end{aligned}$$

ii) Wegen $a_n > 0$ ist die Folge nach unten beschränkt. Nach (a) und wegen $a_1 = 1$ ist auch $(\sqrt{5}-1)/2 < 1$ eine untere Schranke.

Es gilt

$$a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2+a_n} < a_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n^2 + a_n - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \,,$$

was nach (a) für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, d.h. die Folge ist monoton fallend.

Nach dem Satz von der monotonen Folge existiert ein Grenzwert a, für den gelten muss

$$a = \frac{1+a}{2+a} \,, \qquad \text{also } a^2 + a - 1 = 0 \,.$$

Diese quadratische Gleichung hat wie oben gesehen die Lösungen

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

und $a \geq 0$ (wegen $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$) zeigt schließlich

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \,.$$

Zusatzaufgabe

i) Es gilt

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^2-(n+1)^2}{n(n+1)} = -\frac{2n+1}{n^2+n} = -\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} \to 0$$

für $n \to \infty$.

ii) Es gilt

$$\frac{7\sqrt{n}+1}{n} = \frac{7}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \to 0$$

für $n \to \infty$.

iii) Für alle $n \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{n^3+4n+4}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n^3(1+\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n^3})}{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})} \\ &= n \cdot \frac{1+\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \\ &\geq n \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \\ &\geq \frac{1}{3}n,\end{aligned}$$

sodass die Folge nach oben unbeschränkt und somit nach Satz 8.2 divergent ist.

iv) Es gilt

$$\sqrt{n^2+3n} - n = \frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} \to \frac{3}{2}$$

für $n \to \infty$.

v) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$-1 \leq \sin(n^n) \leq 1,$$

sodass

$$\underbrace{-\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}}_{\to 0} = -\frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}\sin(n^n)}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \underbrace{\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}}}_{\to 0}$$

und mit dem Einschließungskriterium (Satz 8.4 iii)) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\sin(n^n)}{n+1} = 0.$$

vi) Es seien $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon = 1/2$. Ist $a \geq 0$, so gilt für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ und $n = 2N+1 > N$, dass

$$|(-1)^n - a| = |-1-a| = 1+a \geq 1 > \varepsilon.$$

Ist $a < 0$, so gilt für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ und $n = 2N > N$, dass

$$|(-1)^n - a| = |1 - a| = 1 - a > 1 > \varepsilon.$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ existiert also nicht.

vii) Es gilt

$$\begin{aligned}\left(4 + \frac{n-1}{n+1}\right)^{1/n} &= \left(\frac{4(n+1)+n-1}{n+1}\right)^{1/n}\\ &= \left(\frac{5n+3}{n+1}\right)^{1/n}\\ &= \left(\frac{5+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{1/n},\end{aligned}$$

und aus

$$\underbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^{1/n}}_{\to 1} \leq \left(\frac{5+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{1/n} \leq \underbrace{8^{1/n}}_{\to 1}$$

folgt mit dem Einschließungskriterium, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4 + \frac{n-1}{n+1}} = 1.$$

viii) Es gilt

$$\frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n} \to \frac{1}{2}$$

für $n \to \infty$.

ix) Es sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$1 + \frac{1}{m} > 1,$$

sodass

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-1} < 1$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-n} = 0$$

(geometrische Folge). Die Folge $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ mit $a_m = \lim_{n\to\infty}(1+m^{-1})^{-n}$ ist also konstant 0, sodass

$$\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-n} = 0.$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach den Rechenregeln für konvergente Folgen (Satz 8.4), dass

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-n} = \left(\lim_{m\to\infty}\left[1 + \frac{1}{m}\right]\right)^{-n} = 1.$$

Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \lim_{m\to\infty}(1+m^{-1})^{-n}$ ist also konstant 1, sodass

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-n} = 1.$$

x) Für $n \in \{2k+1 \colon k \in \mathbb{N}_0\}$ (n ungerade) gilt $-n(1-(-1)^n) = -2n$, sodass die Folge nach unten unbeschränkt und somit nach Satz 8.2 divergent ist.
