Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Nina Becker

Tag 4, Thema 1
Reihen
Blockkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Kapitel 8.2 "Reelle Zahlenreihe"

Übungen

Aufgabe 1. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

i) $$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{1+\frac{1}{j}}\right),$$

ii) $$\frac{3}{1}+\frac{9}{5}+\frac{27}{25}+\frac{81}{125}+\frac{243}{625}+\dots,$$

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left((-1)^n+\frac{1}{n}\right),$

iv) $$\sum_{j=3}^{\infty}\frac{j+2}{j^2-4},$$

v) $$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{k}}\right)^k,$$

vi) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{1+\sqrt{k}},$$

vii) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k+2^k},$$

viii) $$\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}2n\\ n\end{pmatrix}5^{-n},$$

ix) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n-2}}{3^{4+2n}}.$$

Aufgabe 2.

i) Es sei

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$s_n = \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Konvergiert die Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$? Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

ii) (a) Es sei $m \in \mathbb{N} - \{1\}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=2}^{\infty} m^{-n} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}.$$

[Hinweis: geometrische Reihe.]

(b) Folgern Sie, dass

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} m^{-n} = 1.$$

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}.$$

i) Konvergiert die Reihe?

ii) Konvergiert die Reihe absolut?

iii) Konvergiert die Umordnung

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
& + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\Big) - \frac{1}{6} \\
& + \Big(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\Big) - \frac{1}{8} \\
& + \qquad \cdots \\
& + \Big(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\Big) - \frac{1}{2n+2} \\
& + \qquad \cdots
\end{aligned}$$

der obigen Reihe?

iv) Zeigen Sie, dass die Umordnung

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots$$

der obigen Reihe konvergiert.

Zusatzaufgabe Konvergieren die folgenden Reihen?

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n^2}$

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$

v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

vi) $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^2$

vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^{n+1}}$