Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Nina Becker

Lösungen
Tag 4, Thema 1
Reihen
Blockkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Aufgabe 1.

i) Wegen

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{j}} = 1$$

ist die Folge $\{(-1)^j/(1+\frac{1}{j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, sodass die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left(\frac{1}{1+\frac{1}{j}}\right)$$

divergiert.

ii) Es ist

$$\frac{3}{1}+\frac{9}{5}+\frac{27}{25}+\frac{81}{125}+\frac{243}{625}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{5^k}=3\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k$$

und nach Satz 8.7 (geometrische Reihe) konvergiert die Reihe.

iii) Die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ (Leibniz-Kriterium (Satz 8.10)) und $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (siehe Seite 140) sind konvergent, sodass nach Korollar 8.1 auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big((-1)^n+\frac{1}{n}\big)$ konvergiert.

iv) Es gilt

$$\frac{j+2}{j^2-4} \geq \frac{j}{j^2} = \frac{1}{j}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ und da $\sum_{j=3}^{\infty}\frac{1}{j}$ divergiert (harmonische Reihe (Seite 136)), divergiert auch $\sum_{j=3}^{\infty}\frac{j+2}{j^2-4}$ nach dem Minorantenkriterium (Satz 8.11(b)).

v) Wegen

$$\left(\frac{1}{2+\frac{1}{k}}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^k$ konvergiert (geometrische Reihe (Satz 8.7)), konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{k}}\right)^k.$$

vi) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{1+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+\sqrt{k}}$$

und da die Folge $\{\frac{1}{1+\sqrt{k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert diese Reihe nach dem Leibniz-Kriterium.

vii) Wegen $2k > k+1$ für alle $k \geq 2$ ist

$$0 \leq \frac{\frac{k+1}{k+1+2^{k+1}}}{\frac{k}{k+2^k}} = \frac{k+1}{k}\cdot\frac{k+2^k}{k+1+2^{k+1}} = \frac{k^2+k+(k+1)2^k}{k^2+k+2k2^k} < 1$$

für alle $k \geq 2$ sodass nach dem Quotientenkriterium (Satz 8.12(a)) die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k+2^k}$ konvergiert.

viii) Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{2(n+1)}{n+1}5^{-(n+1)}}{\binom{2n}{n}5^{-n}} &= \frac{1}{5}\cdot\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}\\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{4n^2+5n+2}{n^2+2n+1}\\
&= \frac{1}{5}\cdot\frac{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\\
&< \frac{1}{5}\cdot\left(4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\\
&< 1
\end{aligned}$$

für alle $n \geq 10$, sodass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}5^{-n}$ nach dem Quotientenkriterium konvergiert.

ix) Es ist

$$0 \leq \frac{2^{3n-2}}{3^{4+2n}} = \frac{2^n}{324}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$$

und aus

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{324}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}} = \frac{2}{\sqrt[n]{324}}\cdot\frac{4}{9} \leq \frac{8}{9} < 1$$

folgt mit dem Wurzelkriterium (Satz 8.12(b)), dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n-2}}{3^{4+2n}}$ konvergiert.

Aufgabe 2.

i) (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k\right) - 1 \\
&= \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} - 1 \\
&= \frac{4 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{3} - \frac{3}{3} \\
&= \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Wegen $(\frac{1}{4})^n \to 0$ für $n \to \infty$ folgt mit den Grenzwertsätzen für konvergente Folgen (Satz 8.4), dass

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{3} = \frac{1}{3}.$$

ii) (a) Wegen $m \geq 2$ gilt $|1/m| = 1/m \leq 1/2$ sodass mit dem Majorantenkriterium (Satz 8.11(a)) durch Vergleich mit der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^k$ folgt, dass $\sum_{n=2}^{\infty} m^{-n}$ konvergent ist mit

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} m^{-n} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^n\right) - \frac{1}{m} - 1 \\
&= \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} - \frac{1}{m} - 1 \\
&= \frac{m}{m-1} - \frac{1}{m} - 1 \\
&= \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

(b) Nach Teil (a) gilt

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} m^{-n} = \sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right)$$

und für $N \in \mathbb{N}$ ist die N-te Partialsumme dieser Reihe gegeben durch (Induktion!)

$$s_N = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1}\right) + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) = 1 - \frac{1}{N}.$$

Es folgt

$$\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} m^{-n} = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N} = 1.$$

Aufgabe 3.

i) Da $\{\frac{1}{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$ nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 8.10).

ii) Wegen
$$\left|(-1)^n\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$$
für alle $n\in\mathbb{N}$ und da die harmonische Reihe divergiert, ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$ nach dem Minorantenkriterium (Satz 8.11(b)) nicht absolut konvergent.

iii) Die gegebene Umordnung kann geschrieben werden als die Reihe
$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\
&+\Big(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\Big)-\frac{1}{6}\\
&+\Big(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\Big)-\frac{1}{8}\\
&+\qquad\qquad\ldots\\
&+\Big(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\Big)-\frac{1}{2n+2}\\
&+\qquad\qquad\ldots\\
=\;&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{2^n+(2k-1)}\right)-\frac{1}{2n+2}\right]
\end{aligned}$$
und da
$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{2^n+(2k-1)}\right)-\frac{1}{2n+2} &\geq \left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{2^n+2^n-1}\right)-\frac{1}{2n+2}\\
&= 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}-1}-\frac{1}{2n+2}\\
&\geq \frac{1}{4}-\frac{1}{2n+2}\\
&\geq \frac{1}{4}-\frac{1}{6}\\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$
für alle $n\in\mathbb{N}-\{1\}$ gilt, ist $\Big\{\Big(\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{2^n+(2k-1)}\Big)-\frac{1}{2n+2}\Big\}_{n\in\mathbb{N}-\{1\}}$ keine Nullfolge. Also divergiert die gegebene Umordnung.

iv) Die gegebene Umordnung kann geschrieben werden als die Reihe
$$\begin{aligned}
\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big)+\Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\Big)+\Big(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\Big)+\ldots &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\Big)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}
\end{aligned}$$

und da

$$0 \leq \frac{1}{2n(2n-1)} = \frac{1}{4n^2-2n} \leq \frac{1}{2n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent ist, konvergiert die gegebene Umordnung nach dem Majoratenkriterium (Satz 8.11(a)).

Zusatzaufgabe

i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$

und wegen der Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ (harmonische Reihe) folgt mit dem Minorantenkriterium (Satz 8.11(b)), dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ divergiert.

ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+5n+2} < 1,$$

sodass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ nach dem Quotientenkriterium (Satz 8.12(a)) konvergiert.

iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n^2}\right| \leq \frac{2+|\sin^3(n+1)|}{2^n+n^2} \leq \frac{3}{2^n}$$

und da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ konvergiert (geometrische Reihe), konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n^2}$ nach dem Majorantenkriterium.

iv) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen der Monotonie der Wurzelfunktion

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+3)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}} \geq \frac{1}{\sqrt{4n^2}} = \frac{1}{2n}.$$

und wegen der Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ (harmonische Reihe) folgt mit dem Minorantenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$ divergiert.

v) Die Folge $\{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge, sodass die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert.

vi) In Teil *v*) wurde gezeigt, dass der Grenzwert

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

existiert, sodass nach den Rechenregeln für konvergente Folgen (Satz 8.4)

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \cdot \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = s^2$$

gilt.

vii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n\right|} = \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n} = \frac{n^2+1}{2n^2+1} < 1,$$

sodass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n^2+1}{2n^2+1})^n$ nach dem Wurzelkriterium (Satz 8.12(b)) konvergiert.

viii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{\frac{2(n+1)}{3^{n+2}}}{\frac{2n}{3^{n+1}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{<3} < 1$$

sodass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^{n+1}}$ nach dem Quotientenkriterium (Satz 8.12(a)) konvergiert.