Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Nina Becker

Tag 5, Thema 1
Funktionenfolgen & Funktionenreihen
Blockkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Kapitel 9.1 “Funktionenfolgen”

Übungen

Aufgabe 1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien

i) $f_n\colon [0, 1/2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$,

ii) $g_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g_n(x) := \dfrac{x + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x^2}{n^2}}$,

iii) $h_n\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h_n(x) := \dfrac{x + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x^2}{n^2}}$.

Sind die Folgen punktweise konvergent? Wenn ja, wie lautet der Grenzwert? Sind die Folgen gleichmäßig konvergent?

Hinweis zu iii). Berechnen Sie $h_n(n)$.

Aufgabe 2.

i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \le x < 1, \\ 2^{-n}, & x \ge 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig ist.

ii) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h_n\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(x) = \frac{nx}{1 + n|x|}, \qquad h_n(x) = \frac{n\sin(x)}{1 + n + \cos(x)}.$$

(a) Konvergieren $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise?

(b) Konvergieren $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig?