Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Nina Becker

Lösungen
Tag 5, Thema 1
Funktionenfolgen
Blockkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Aufgabe 1.

i) Für alle $x \in [0, \frac{1}{2}]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x^n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

sodass

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |x^n| \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0,$$

d.h. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig und daher insbesondere punktweise gegen die Nullfunktion $f\colon [0, 1/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

ii) Für alle $x \in [0, 1]$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x^2}{n^2}} = x,$$

sodass $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Funktion $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ konvergiert. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sup_{x\in[0,1]} |g_n(x) - g(x)| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x^2}{n^2}} - x \right| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x + \frac{x}{n} - (x + \frac{x^3}{n^2})}{1 + \frac{x^2}{n^2}} \right| \\
&= \frac{1}{n} \sup_{x\in[0,1]} \left| \frac{x - \frac{x^3}{n}}{1 + \frac{x^2}{n^2}} \right| \\
&\leq \frac{1}{n} \sup_{x\in[0,1]} \left| x - \frac{x^3}{n} \right| \\
&\leq \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

sodass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |g_n(x) - g(x)| = 0$$

und damit ist die Konvergenz gleichmäßig.

iii) Aus Teil *ii)* wissen wir, dass $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert gegen die Funktion $h\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = x$. Für $n \geq 2$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,\infty)} |h_n(x) - h(x)| &\geq |h_n(n) - h(n)| \\ &= \left|\frac{n+1}{2} - n\right| \\ &= \left|\frac{-n+1}{2}\right| \\ &= \frac{n-1}{2},\end{aligned}$$

sodass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} |h_n(x) - h(x)|$$

nicht existiert. Also konvergiert $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig.

Aufgabe 2.

i) (a) Für $x \in [0,1)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

und für $x \in [1,\infty)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Also konvergiert die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion

$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0.$$

(b) Aus Teil (a) wissen wir, dass der punktweise Limes f der Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der einzige mögliche Kandidat für den gleichmäßigen Limes von $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Da die Funktion $x \mapsto x^n$ monoton wachsend auf $[0,\infty)$ ist, gilt

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig konvergent.

ii) (a) Für $x = 0$ gilt $g_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$\lim_{n\to\infty} g_n(0) = 0.$$

Für $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n|x|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{|x|+\frac{1}{n}} = \frac{x}{|x|}.$$

Die Funktionenfolge $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also punktweise gegen die durch die Formel

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Für $x \in [0, 2\pi]$ gilt (wegen $0 \leftarrow 0 \leq (1+\cos(x))/n \leq 2/n \to 0$)

$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sin(x)}{1+n+\cos(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x)}{1+\frac{1+\cos(x)}{n}} = \sin(x).$$

Die Funktionenfolge $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also punktweise gegen die durch die Formel $h(x) = \sin(x)$ definierte Funktion $h\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| &\geq \sup_{x\in\mathbb{R}-\{0\}} |g_n(x) - g(x)| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}-\{0\}} \left| \frac{nx}{1+n|x|} - \frac{x}{|x|} \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}-\{0\}} \left| \frac{nx|x| - (x + nx|x|)}{|x| + n|x|^2} \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}-\{0\}} \left| \frac{-x}{|x| + n|x|^2} \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}-\{0\}} \frac{1}{1+n|x|} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

sodass

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_\infty = 1 \neq 0.$$

Also konvergiert die Funktionenfolge $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\underbrace{0}_{\to 0} \leq \sup_{x\in[0,2\pi]} |h_n(x) - h(x)| &= \sup_{x\in[0,2\pi]} \left| \frac{n\sin(x)}{1+n+\cos(x)} - \sin(x) \right| \\
&= \sup_{x\in[0,2\pi]} \left| \frac{n\sin(x) - (\sin(x) + n\sin(x) + \sin(x)\cos(x))}{1+n+\cos(x)} \right| \\
&= \sup_{x\in[0,2\pi]} \left| \frac{\sin(x) + \sin(x)\cos(x)}{1+n+\cos(x)} \right| \\
&\leq \sup_{x\in[0,2\pi]} \frac{|\sin(x)| + |\sin(x)||\cos(x)|}{1+n+\cos(x)} \\
&\leq \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0},
\end{aligned}$$

sodass

$$\lim_{n\to\infty} \|h_n - h\|_\infty = 0.$$

Also konvergiert die Funktionenfolge $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion h.