Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Nina Becker

Lösungen
Tag 5, Thema 2
Potenzreihen Blockkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Aufgabe 1.

i) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^2(x-2)^{k+1}}{k^2(x-2)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2|x-2| = |x-2| < 1$$

genau dann, wenn $1 < x < 3$. Nach dem Quotientenkriterium (Korollar 8.3) konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^2(x-2)^k$ also für alle $x \in (1,3)$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} - [1,3]$.

Für $x \in \{1,3\}$ ist die Folge $\{k^2(x-2)^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, sodass die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^2(x-2)^k$ für $x \in \{1,3\}$ divergiert.

ii) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(k+1)^2}(x-2)^{k+1}}{\frac{1}{k^2}(x-2)^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^2|x-2| = |x-2| < 1$$

genau dann, wenn $1 < x < 3$. Nach dem Quotientenkriterium (Korollar 8.3) konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}(x-2)^k$ also für alle $x \in (1,3)$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} - [1,3]$.

Für $x = 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 8.10) und für $x = 3$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ (Seite 140).

iii) Es ist

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{k^{-k}}{2^k}(x-6)^k\right|} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}|x-6| = 0 < 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Wurzelkriterium (Korollar 8.3) konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-k}}{2^k}(x-6)^k$ also für alle $x \in \mathbb{R}$.

iv) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{2^{k+1}((k+1)^2+1)}x^{k+1}}{\frac{1}{2^k(k^2+1)}x^k}\right| = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{k^3+k^2+k+1}{k^3+2k^2+2k}|x| = \frac{1}{2}|x| < 1$$

genau dann, wenn $-2 < x < 2$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k(k^2+1)} x^k$ also für alle $x \in (-2, 2)$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} - [-2, 2]$.

Für $x = -2$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$ nach dem Leibniz-Kriterium und für $x = 2$ folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ aus der Kovergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ und dem Majorantenkriterium (Satz 8.11(a)).

$v)$ Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|(-1)^k \frac{2^k}{k}(x+1)^k\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{\sqrt[k]{k}}|x+1| = 2|x+1| < 1$$

genau dann, wenn $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$. Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2^k}{k}(x+1)^k$ für alle $x \in (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} - [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$.

Für $x = -\frac{3}{2}$ ist die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2^k}{k}\Big(-\frac{3}{2}+1\Big)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

divergent und für $x = -\frac{1}{2}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2^k}{k}\Big(-\frac{1}{2}+1\Big)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

nach dem Leibniz-Kriterium.

$vi)$ Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{2(k+1)+1}}{(-3)^{k+1}}}{\frac{x^{2k+1}}{(-3)^k}} \right| = \frac{1}{3}|x|^2 < 1$$

genau dann, wenn $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(-3)^k}$ für alle $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} - [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

Für $x = \pm\sqrt{3}$ ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm\sqrt{3})^{2k+1}}{(-3)^k} = \pm\sqrt{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(-3)^k} = \pm\sqrt{3}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$$

divergent.

Aufgabe 2.

i) (a) Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2+\sqrt{n+1}}(x-1)^{n+1}}{\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\sqrt{n}}{(n+1)^2+\sqrt{n+1}}|x-1| = |x-1| < 1$$

genau dann, wenn $0 < x < 2$. Nach dem Quotientenkriterium (Korollar 8.3) konvergiert die Potenzreihe also für alle $x \in (0,2)$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} - [0,2]$.

Für $x = 0$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$ nach dem Leibniz-Kriterium (Satz 8.10). Ist $x = 2$, so gilt

$$0 \le \frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \le \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert (Seite 140), konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ nach dem Majorantenkriterium (Satz 8.11(a)).

Die gegebene Potenzreihe konvergiert also genau dann, wenn $x \in [0,2]$.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}(x+1)^{n+1}}{\frac{1}{n2^n}(x+1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{|x+1|}{2} = \frac{|x+1|}{2} < 1$$

genau dann, wenn $-3 < x < 1$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Potenzreihe also für alle $x \in (-3,1)$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} - [-3,1]$.

Für $x = -3$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(-3+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

nach dem Leibniz-Kriterium konvergent. Für $x = 1$ ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(1+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

divergent (harmonische Reihe).

Die gegebene Potenzreihe konvergiert also genau dann, wenn $x \in [-3,1)$.

(c) Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{1+\frac{1}{n+1}}(x-1)^{n+1}}{\frac{n}{1+\frac{1}{n}}(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3+2n^2}|x-1| = |x-1| < 1$$

genau dann, wenn $0 < x < 2$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Potenzreihe also für alle $x \in (0,2)$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} - [0,2]$.

Wegen

$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n}}{1+\frac{1}{2n}}$$

ist $\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}(x-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ für $x \in \{0,2\}$ keine Nullfolge und daher divergiert die Potenzreihe für $x \in \{0,2\}$ nach Korollar 8.2.

Die gegebene Potenzreihe konvergiert also genau dann, wenn $x \in (0,2)$.

(d) Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^n(x-3)^n|} = 2|x-3| < 1$$

genau dann, wenn $\frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$. Nach dem Wurzelkriterium (Korollar 8.3) konvergiert die Potenzreihe also für alle $x \in (\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} - [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$.
Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \Big(\frac{5}{2} - 3\Big)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \Big(\frac{7}{2} - 3\Big)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n$$

divergiert die Potenzreihe für $x \in \{\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\}$.
Die gegebene Potenzreihe konvergiert also genau dann, wenn $x \in (\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$.

ii) (e) Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}(x-3)^{3n}\right|} = \frac{|x-3|^3}{2} < 1$$

genau dann, wenn $3 - \sqrt[3]{2} < x < 3 + \sqrt[3]{2}$. Nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Reihe also für alle $x \in (3 - \sqrt[3]{2}, 3 + \sqrt[3]{2})$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} - (3 - \sqrt[3]{2}, 3 + \sqrt[3]{2})$.
Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(3 - \sqrt[3]{2} - 3)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(3 + \sqrt[3]{2} - 3)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n$$

divergiert die Reihe für $x \in \{3 - \sqrt[3]{2}, 3 + \sqrt[3]{2}\}$.
Die gegebene Reihe konvergiert also genau dann wenn $x \in (3 - \sqrt[3]{2}, 3 + \sqrt[3]{2})$.

(f) Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)/2}}\binom{2(n+1)}{n+1}x^{2(n+1)}}{\frac{n}{2^{n/2}}\binom{2n}{n}x^{2n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{n(n+1)}}_{=4} |x|^2 = 2\sqrt{2}|x|^2 < 1$$

genau dann wenn $-\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}} < x < \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe also für alle $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}})$ und divergiert für alle $x \in \mathbb{R} - [-\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}]$.
Für $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$ berechnen wir

$$\frac{n}{2^{n/2}}\binom{2n}{n}\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}\right)^{2n} = \frac{n(2n)!}{4^n(n!)^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(2n)!}{4^n((n-1)!)^2}$$

und aus $(2n)! \geq 4^n((n-1)!)^2$ für alle $n \geq 2$ (Induktion!) folgt, dass

$$\frac{n}{2^{n/2}}\binom{2n}{n}\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}\right)^{2n} \geq \frac{1}{n}$$

für alle $n \geq 2$, sodass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n/2}}\binom{2n}{n}\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}\right)^{2n}$$

wegen der Divergenz der harmonischen Reihe nach dem Minorantenkriterium (Satz 8.11(b)) divergiert.

Die gegebene Reihe konvergiert also genau dann, wenn $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}})$.