Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Selina Schwindling

Lösungen
Tag 6, Thema 1
Polynominterpolation
Blokkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Aufgabe 1.

i) Es sei $j \in \{0, \dots, n\}$ fixiert. Ist $l = j$, so gilt

$$L_j(x_l) := \prod_{k=0,\, k\neq j}^{n} \frac{x_l - x_k}{x_j - x_k} = \prod_{k=0,\, k\neq j}^{n} \frac{x_j - x_k}{x_j - x_k} = 1\,.$$

Ist $l \neq j$, so gilt

$$\begin{aligned} L_j(x_l) \quad &:= \prod_{k=0,\, k\neq j}^{n} \frac{x_l - x_k}{x_j - x_k} \\ &= \left[\prod_{k=0,\, k\neq j,\, k\neq l}^{n} \frac{x_l - x_k}{x_j - x_k} \right] \cdot \frac{x_l - x_{k=l}}{x_j - x_{k=l}} = 0\,. \end{aligned}$$

ii) Man fixiere eine Stützstelle x_l, d.h. ein $l \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dann ist nach *i)*

$$L_l(x_l) = 1\,, \qquad L_j(x_l) = 0 \quad \text{für } \ j = 0, 1 \dots, n\,, \ \ j \neq l\,.$$

Also folgt

$$p_n(x_l) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x_l) = y_l\,,$$

und es handelt sich tatsächlich um eine Lösung der Interpolationsaufgabe.

Falls es eine weitere Lösung der Interpolationsaufgabe, d.h. ein Polynom $q_n(x)$ vom Grad kleiner oder gleich n mit der obigen Eigenschaft gibt, so gilt

$$p_n(x_i) - q_n(x_i) = y_i - y_i = 0 \quad \text{für } \ i = 0, \dots, n\,.$$

Folglich ist $p_n(x) - q_n(x)$ ein Polynom vom Grad maximal n mit $(n+1)$ Nullstellen. Das ist aber nur möglich, falls $p_n(x)$ identisch gleich $q_n(x)$ ist. □

Aufgabe 2.

i) Es handelt sich um den Logarithmus $\log_2\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zur Basis 2.

ii) Setze $x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = 1, x_2 = 2$ und $x_3 = 4$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= \sum_{j=0}^{3} y[x_0,\dots,x_j]N_j^{(3)}(x) \\
&= y[\tfrac{1}{2}] + y[\tfrac{1}{2},1]\cdot N_1^{(3)}(x) + y[\tfrac{1}{2},1,2]\cdot N_2^{(3)}(x) + y[\tfrac{1}{2},1,2,4]\cdot N_3^{(3)}(x) \\
&= -1 + 2\cdot(x-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{2}{3}\cdot(x-\tfrac{1}{2})(x-1) + \tfrac{1}{7}(x-\tfrac{1}{2})(x-1)(x-2) \\
&= \tfrac{1}{7}x^3 - \tfrac{7}{6}x^2 + \tfrac{7}{2}x - \tfrac{52}{21}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

iii) Es gilt

$$|p_3(3) - \log_2(3)| = |\tfrac{29}{21} - \log_2(3)| = \left|\log_2\left(\frac{2^{29/21}}{3}\right)\right| \approx 0,204010.$$

Aufgabe 3. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_2-x_1} = \frac{x-1}{-2-1}\cdot\frac{x-2}{2-1} = -\frac{1}{3}(x-1)(x-2), \\
L_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x+2}{1+2}\cdot\frac{x-2}{1-2} = -\frac{1}{3}(x+2)(x-2), \\
L_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_1}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x+2}{2+2}\cdot\frac{x-1}{2-1} = \frac{1}{4}(x+2)(x-1),
\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= y_0\cdot L_0(x) + y_1\cdot L_1(x) + y_2\cdot L_2(x) \\
&= 0\cdot L_0(x) + 2\cdot L_1(x) + (-1)\cdot L_2(x) \\
&= -\frac{2}{3}(x+2)(x-2) - \frac{1}{4}(x+2)(x-1) \\
&= -\frac{11}{12}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{19}{6}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.

i) (a) Für $x \in \mathbb{R}$ berechnen wir gemäß Satz 7.1

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= -1 \cdot \frac{x-1}{-1-1} \cdot \frac{x-2}{-1-2} + 1 \cdot \frac{x+1}{1+1} \cdot \frac{x-2}{1-2} + 5 \cdot \frac{x+1}{2+1} \cdot \frac{x-1}{2-1} \\
&= -\frac{1}{6}(x-1)(x-2) - \frac{1}{2}(x+1)(x-2) + \frac{5}{3}(x+1)(x-1) \\
&= -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{5}{3}x^2 - \frac{5}{3} \\
&= x^2 + x - 1.
\end{aligned}$$

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ berechnen wir gemäß Satz 7.1

$$\begin{aligned}
p_3(x) = &-1 \cdot \frac{x-1}{-1-1} \cdot \frac{x-2}{-1-2} \cdot \frac{x-0}{-1-0} + 1 \cdot \frac{x+1}{1+1} \cdot \frac{x-2}{1-2} \cdot \frac{x-0}{1-0} \\
&+ 5 \cdot \frac{x+1}{2+1} \cdot \frac{x-1}{2-1} \cdot \frac{x-0}{2-0} + 1 \cdot \frac{x+1}{0+1} \cdot \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-2}{0-2} \\
= &\frac{1}{6}x(x-1)(x-2) - \frac{1}{2}x(x+1)(x-2) \\
&+ \frac{5}{6}x(x+1)(x-1) + \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2) \\
= &\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \\
= &x^3 - x^2 + 1.
\end{aligned}$$

ii) (a) Wir berechnen die dividierten Differenzen im folgenden Schema:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
x_0 = -1 & y[x_0] = -1 & & \\
 & & y[x_0, x_1] = 1 & \\
x_1 = 1 & y[x_1] = 1 & & y[x_0, x_1, x_2] = 1 \\
 & & y[x_1, x_2] = 4 & \\
x_2 = 2 & y[x_2] = 5 & &
\end{array}.$$

Damit erhalten wir die Newtonsche Darstellung

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= y[x_0] + y[x_0, x_1](x+1) + y[x_0, x_1, x_2](x+1)(x-1) \\
&= -1 + x + 1 + x^2 - 1 \\
&= x^2 + x - 1
\end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Wir ergänzen unser Schema wie folgt:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
x_0 = -1 & y[x_0] = -1 & & & \\
 & & y[x_0, x_1] = 1 & & \\
x_1 = 1 & y[x_1] = 1 & & y[x_0, x_1, x_2] = 1 & \\
 & & y[x_1, x_2] = 4 & & y[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1 \\
x_2 = 2 & y[x_2] = 5 & & y[x_1, x_2, x_3] = 2 & \\
 & & y[x_2, x_3] = 2 & & \\
x_3 = 0 & y[x_3] = 1 & & &
\end{array}.$$

Damit erhalten wir die Newtonsche Darstellung

$$\begin{aligned} p_3(x) &= p_2(x) + y[x_0, x_1, x_2, x_3](x+1)(x-1)(x-2) \\ &= x^2 + x - 1 + x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= x^3 - x^2 + 1 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

iii) (a) Wir berechnen die benötigten Größen $p_{j,k}$ in folgendem Schema:

$$\begin{array}{l|l|l|l} x_0 = -1 & y_0 = p_{0,0}(-2) = -1 & & \\ x_1 = 1 & y_1 = p_{1,0}(-2) = 1 & p_{1,1}(-2) = -2 & \\ x_2 = 2 & y_2 = p_{2,0}(-2) = 5 & p_{2,1}(-2) = -11 & p_{2,2}(-2) = 25 \end{array}.$$

Mit dem Algorithmus von Neville erhalten wir $p_2(-2) = p_{2,2}(-2) = 1$.

(b) Wir ergänzen unser Schema wie folgt:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} x_0 = -1 & y_0 = p_{0,0}(-2) = -1 & & & \\ x_1 = 1 & y_1 = p_{1,0}(-2) = 1 & p_{1,1}(-2) = -2 & & \\ x_2 = 2 & y_2 = p_{2,0}(-2) = 5 & p_{2,1}(-2) = -11 & p_{2,2}(-2) = 1 & \\ x_3 = 0 & y_3 = p_{3,0}(-2) = 1 & p_{3,1}(-2) = -3 & p_{3,2}(-2) = 13 & p_{3,3}(-2) = -11 \end{array}.$$

Mit dem Algorithmus von Neville erhalten wir $p_3(-2) = p_{3,3}(-2) = -11$.

Aufgabe 5.

i) (a) Für $x \in \mathbb{R}$ berechnen wir gemäß Satz 7.1

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 3 \cdot \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-3}{0-3} + 1 \cdot \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-3}{1-3} + 2 \cdot \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-1}{3-1} \\ &= (x-1)(x-3) - \frac{1}{2}x(x-3) + \frac{1}{3}x(x-1) \\ &= x^2 - 4x + 3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x \\ &= \frac{5}{6}x^2 - \frac{17}{6}x + 3. \end{aligned}$$

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ berechnen wir gemäß Satz 7.1

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= 3 \cdot \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-3}{0-3} \cdot \frac{x-5}{0-5} + 1 \cdot \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-3}{1-3} \cdot \frac{x-5}{1-5} \\
&\quad + 2 \cdot \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-5}{3-5} + 3 \cdot \frac{x-0}{5-0} \cdot \frac{x-1}{5-1} \cdot \frac{x-3}{5-3} \\
&= -\frac{1}{5}(x-1)(x-3)(x-5) + \frac{1}{8}x(x-3)(x-5) \\
&\quad - \frac{1}{6}x(x-1)(x-5) + \frac{3}{40}x(x-1)(x-3) \\
&= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{10}{3}x + 3.
\end{aligned}$$

ii) (a) Wir berechnen die dividierten Differenzen im folgenden Schema:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
x_0 = 0 & y[x_0] = 3 & & \\
 & & y[x_0, x_1] = -2 & \\
x_1 = 1 & y[x_1] = 1 & & y[x_0, x_1, x_2] = \frac{5}{6} \\
 & & y[x_1, x_2] = \frac{1}{2} & \\
x_2 = 3 & y[x_2] = 2 & &
\end{array}.$$

Damit erhalten wir die Newtonsche Darstellung

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= y[x_0] + y[x_0, x_1]x + y[x_0, x_1, x_2]x(x-1) \\
&= 3 - 2x + \frac{5}{6}x(x-1) \\
&= \frac{5}{6}x^2 - \frac{17}{6}x + 3
\end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Wir ergänzen unser Schema wie folgt:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
x_0 = 0 & y[x_0] = 3 & & & \\
 & & y[x_0, x_1] = -2 & & \\
x_1 = 1 & y[x_1] = 1 & & y[x_0, x_1, x_2] = \frac{5}{6} & \\
 & & y[x_1, x_2] = \frac{1}{2} & & y[x_0, x_1, x_2, x_3] = -\frac{1}{6} \\
x_2 = 3 & y[x_2] = 2 & & y[x_1, x_2, x_3] = 0 & \\
 & & y[x_2, x_3] = \frac{1}{2} & & \\
x_3 = 5 & y[x_3] = 3 & & &
\end{array}.$$

Damit erhalten wir die Newtonsche Darstellung

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= p_2(x) + y[x_0, x_1, x_2, x_3]x(x-1)(x-3) \\
&= \frac{5}{6}x^2 - \frac{17}{6}x + 3 - \frac{1}{6}(x^3 - 4x^2 + 3x) \\
&= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{10}{3}x + 3
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

iii) (a) Wir berechnen die benötigten Größen $p_{j,k}$ in folgendem Schema:

$$\begin{array}{r|l|l|l}
x_0 = 0 & y_0 = p_{0,0}(2) = 3 & & \\
 & & & \\
x_1 = 1 & y_1 = p_{1,0}(2) = 1 & p_{1,1}(2) = -1 & \\
 & & & \\
x_2 = 3 & y_2 = p_{2,0}(2) = 2 & p_{2,1}(2) = \frac{3}{2} & p_{2,2}(2) = \frac{2}{3}
\end{array}.$$

Mit dem Algorithmus von Neville erhalten wir $p_2(2) = p_{2,2}(2) = \frac{2}{3}$.

(b) Wir ergänzen unser Schema wie folgt:

$$\begin{array}{r|l|l|l|l}
x_0 = 0 & y_0 = p_{0,0}(2) = 3 & & & \\
 & & & & \\
x_1 = 1 & y_1 = p_{1,0}(2) = 1 & p_{1,1}(2) = -1 & & \\
 & & & & \\
x_2 = 3 & y_2 = p_{2,0}(2) = 2 & p_{2,1}(2) = \frac{3}{2} & p_{2,2}(2) = \frac{2}{3} & \\
 & & & & \\
\color{red}{x_3 = 5} & \color{red}{y_3 = p_{3,0}(2) = 3} & \color{red}{p_{3,1}(2) = \frac{3}{2}} & \color{red}{p_{3,2}(2) = \frac{3}{2}} & \color{red}{p_{3,3}(2) = 1}
\end{array}.$$

Mit dem Algorithmus von Neville erhalten wir $p_3(2) = p_{3,3}(2) = 1$.