Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Selina Schwindling

Tag 6, Thema 2
Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$
Blokkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Kapitel 10.1 "Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$"

Übungen

Aufgabe 1.

i) Welche Forderungen aus Definition 10.1 müssen verifiziert werden, um zu zeigen, dass eine Teilmenge U eines Vektorraums V selbst ein Vektorraum (ein sogenannter *Unterraum* von V) ist?

ii) Prüfen Sie, ob es sich um Vektorräume handelt:

$$U_1 := \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 \geq 0\right\}, \qquad U_2 := \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 < x_3^2\right\},$$
$$U_3 := \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}, \qquad U_4 := \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 - x_2 = 1\right\}?$$

Aufgabe 2.

i) Es seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ linear unabhängig? Kann der Vektor $\underline{\mathbf{e}}^{(3)}$ der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ geschrieben werden?

(b) Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$ linear unabhängig?

ii) Betrachten Sie die Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad w_1,\ w_2 \in \mathbb{R} \ \text{ fixiert.}$$

Zeigen Sie, dass $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden und finden Sie die eindeutig bestimmten Koeffizienten λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\underline{\mathbf{w}} = \lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)}$.

Bitte wenden.

iii) Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $a \neq 1$ fixiert. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Finden Sie dann zu einem beliebigen (fixierten) Vektor

$$\underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

die eindeutig bestimmten Koeffizienten λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underline{\mathbf{w}} = \lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)} + \lambda_3 \underline{\mathbf{v}}^{(3)} .$$

Aufgabe 3.

i) Es seien $\underline{\mathbf{w}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{w}}^{(2)} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\mathbf{w}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{w}}^{(2)} \neq \underline{\mathbf{0}}$.

Zeigen Sie, dass $\underline{\mathbf{w}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{w}}^{(2)}$ genau dann linear abhängig sind, wenn

$$\underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \lambda \underline{\mathbf{w}}^{(1)} \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R} .$$

ii) Es seien $\underline{\mathbf{u}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{u}}^{(2)}$, $\dots$,$\underline{\mathbf{u}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $3 \leq k \leq n$, $\underline{\mathbf{u}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{u}}^{(2)}$, $\dots$, $\underline{\mathbf{u}}^{(k)} \neq \underline{\mathbf{0}}$.

(a) Sind $\underline{\mathbf{u}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{u}}^{(2)}$, $\dots$, $\underline{\mathbf{u}}^{(k)}$ linear unabhängig, falls sich $\underline{\mathbf{u}}^{(k)}$ nicht als Linearkombination von $\underline{\mathbf{u}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{u}}^{(2)}$, $\dots$, $\underline{\mathbf{u}}^{(k-1)}$ darstellen lässt?

(b) Zeigen Sie: Sind $\underline{\mathbf{u}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{u}}^{(2)}$, $\dots$, $\underline{\mathbf{u}}^{(k)}$ linear abhängig, so existieren mindestens zwei $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, sodass sich der Vektor $\underline{\mathbf{u}}^{(i)}$ als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lässt.

Aufgabe 4. Es sei $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{v}}^{(n)})$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

i) Zeigen Sie: Aus $\dim \mathbb{R}^n = n$ folgt, dass es zu jedem $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ Koordinaten α_1, $\dots$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\underline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)} .$$

Hinweis. Ansatz: $\lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)} + \cdots + \lambda_n \underline{\mathbf{v}}^{(n)} + \lambda \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$.

ii) Zeigen Sie, dass die Koordinaten aus *i*) eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 5.

i) Zeigen Sie: Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$, $\ldots$, $\underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, linear abhängig und nimmt man einen weiteren Vektor hinzu, so ist das erweiterte System linear abhängig.

ii) Zeigen Sie: Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$, $\ldots$, $\underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $2 \leq k \in \mathbb{N}$, linear unabhängig und nimmt man einen Vektor aus dieser Familie heraus, so sind die verbleibenden Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe 6. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $U \subset V$ genau dann ein Unterraum von V ist, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

i) $\underline{\mathbf{0}} \in U$.

ii) $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in U \Rightarrow \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}} \in U$.

iii) $\underline{\mathbf{v}} \in U, \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha\underline{\mathbf{v}} \in U$.

Aufgabe 7.

i) Prüfen Sie die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

auf lineare Abhängigkeit.

ii) Für welchen Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

iii) Ist die Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$?

Bitte wenden.

Aufgabe 8. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie mit Hilfe der Vektorraumaxiome (Definition 10.1), dass die folgenden Aussagen für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und alle $\underline{\mathbf{v}} \in V$ gelten.

i) $\alpha \cdot \underline{\mathbf{0}} = 0 \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{0}}$.

ii) $\alpha \cdot (-\underline{\mathbf{v}}) = (-\alpha) \cdot \underline{\mathbf{v}} = -(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}})$.

Aufgabe 9. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und U_1, U_2 Unterräume von V.

i) Zeigen Sie, dass die Menge $U_1 \cap U_2$ ein Unterraum von V ist.

ii) Finden Sie ein Beispiel für V, U_1 und U_2 so, dass $U_1 \cup U_2$ kein Unterraum von V ist.

Aufgabe 10. Es seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{w}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem seien $U_1 = \operatorname{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$ und $U_2 = \operatorname{Spann}(\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)})$. Geben Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$ an.

Aufgabe 11. Bestimmen Sie

$$\dim \operatorname{Spann}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 12. Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in V$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i) Ist $\operatorname{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)}) = V$, so ist auch

$$\operatorname{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)} - \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)} - \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} - \underline{\mathbf{v}}^{(k)}, \underline{\mathbf{v}}^{(k)}) = V.$$

ii) Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)}$ linear unabhängig, so sind auch

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} - \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)} - \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} - \underline{\mathbf{v}}^{(k)}, \underline{\mathbf{v}}^{(k)}$$

linear unabhängig.