Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Selina Schwindling

Lösungen
Tag 6, Thema 2
Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$
Blokkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Aufgabe 1.

i) Es seien V ein Vektorraum und $U \subseteq V$. Dann sind Addition und Multiplikation mit Skalaren auf U gegeben durch die entsprechenden Operationen auf V, nämlich

$$+ \colon V \times V \supseteq U \times U \to V, \quad (\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \underline{\mathbf{u}}^{(2)}) \mapsto \underline{\mathbf{u}}^{(1)} + \underline{\mathbf{u}}^{(2)}$$

und

$$\cdot \colon \mathbb{K} \times V \supseteq \mathbb{K} \times U \to V, \quad (\lambda, \underline{\mathbf{u}}) \mapsto \lambda \cdot \underline{\mathbf{u}}.$$

Damit U mit diesen Operationen wieder zu einem Vektorraum wird, müssen aus Addition und Multiplikation mit Skalaren wieder Vektoren aus U hervorgehen, d.h. es muss gelten

- $\underline{\mathbf{u}}^{(1)} + \underline{\mathbf{u}}^{(2)} \in U$ für alle $\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \underline{\mathbf{u}}^{(2)} \in U$
- $\lambda \cdot \underline{\mathbf{u}} \in U$ für alle $\underline{\mathbf{u}} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ (insbesondere $\underline{\mathbf{0}} \in U$)

(man sagt in diesem Fall U *ist abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation mit Skalaren*). Alle übrigen Eigenschaften (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität, ...) folgen dann sofort aus den entsprechenden Eigenschaften von V (werden *geerbt*), da jedes Element von U insbesondere Element von V ist (beispielsweise gilt $1 \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}}$ für alle $\underline{\mathbf{v}} \in V$, sodass $1 \cdot \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}$ für alle $\underline{\mathbf{u}} \in U \subseteq V$).

ii) Wir verwenden das Kriterium aus Teil *i)* mit $V = \mathbb{R}^3$.

- Die Menge U_1 ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Es ist nämlich $\underline{\mathbf{x}} = (1, 0, 0)^\top \in U_1$, aber
$$(-1) \cdot \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_1.$$
- Die Menge U_2 ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Es gilt nämlich $\underline{\mathbf{0}} = (0, 0, 0)^\top \notin U_2$.
- Die Menge U_3 ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Es ist $\underline{\mathbf{0}} = (0, 0, 0)^\top \in U_3$ und für $\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)^\top \in U_3$, $\underline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)^\top \in U_3$ und $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ gilt
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0,$$

sodass

$$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0$$

und

$$\lambda(x_1 + x_2 + x_3) = \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 = 0$$

und damit $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}} \in U_3$ und $\lambda \cdot \underline{\mathbf{x}} \in U_3$.

- Die Menge U_4 ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Es gilt nämlich $\underline{\mathbf{0}} = (0,0,0)^\top \notin U_4$.

Aufgabe 2.

i) (a) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\alpha + 2\beta = 0$, also $\beta = -\frac{1}{2}\alpha$ und die zweite Gleichung liefert $2\alpha - \frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{2}\alpha = 0$, also $\alpha = 0$ und damit $\beta = 0$. Die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ sind also linear unabhängig.

Der Vektor $\underline{\mathbf{e}}^{(3)}$ kann nicht als Linearkombination von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ geschrieben werden, denn dann würde es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ geben mit

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also $\alpha + 2\beta = 0$ und $\alpha + 2\beta = 1$, ein Widerspruch.

(b) Die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$ sind linear abhängig, es gilt nämlich

$$\underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + (-1) \cdot \underline{\mathbf{v}}^{(2)}.$$

ii) Wegen $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ (siehe Definition 10.3) genügt es zu zeigen, dass die zwei Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ linear unabhängig sind. Es seien also $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\alpha = 3\beta$ und $\alpha = \beta$, sodass $\alpha = \beta = 0$. Damit sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ linear unabhängig und bilden demzufolge eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Es sei nun $\underline{\mathbf{w}} = (w_1, w_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ fixiert. Da $(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Gleichung liefert zunächst $\lambda_2 = w_2 + \lambda_1$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $\lambda_1 - 3(w_2 + \lambda_1) = w_1$, also $\lambda_1 = -\frac{1}{2}(w_1 + 3w_2)$ und $\lambda_2 = w_2 - \frac{1}{2}(w_1 + 3w_2) = -\frac{1}{2}(w_1 + w_2)$.

iii) Wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ (siehe Definition 10.3) genügt es zu zeigen, dass die drei Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$ linear unabhängig sind. Es seien also $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aus der zweiten Gleichung folgt (wegen $a \neq 0$) sofort $\beta = 0$. Die erste und die dritte Gleichung liefern außerdem $\alpha + \gamma = 0 = \alpha + a\gamma$ was (wegen $a \neq 1$) impliziert, dass $\alpha = \gamma = 0$. Damit sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$ linear unabhängig und bilden demzufolge eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Es sei nun $\underline{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ fixiert. Da $(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)})$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} .$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $\lambda_2 = \frac{1}{a} w_2$ und die dritte Gleichung liefert $\lambda_1 = w_3 - a\lambda_3$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $w_3 - a\lambda_3 + \lambda_3 = w_1$, also $\lambda_3 = \frac{1}{1-a}(w_1 - w_3)$ und $\lambda_1 = w_3 - \frac{a}{1-a}(w_1 - w_3) = -\frac{a}{1-a} w_1 + \frac{1}{1-a} w_3$.

Aufgabe 3.

i) Im $\mathbb{R}^n$ seien gegeben: $\underline{\mathbf{w}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{w}}^{(2)} \neq \underline{\mathbf{0}}$.

Lineare Abhängigkeit bedeutet: Es existieren λ_1, λ_2, nicht beide Null, mit

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{w}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \underline{\mathbf{0}} .$$

Wäre etwa $\lambda_1 = 0$, so wäre im Widerspruch zur Annahme $\underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \underline{\mathbf{0}}$ wegen $\lambda_2 \neq 0$, analog der Fall $\lambda_2 = 0$.

Folglich sind $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 \neq 0$ und es gilt

$$\underline{\mathbf{w}}^{(2)} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \underline{\mathbf{w}}^{(1)} , \quad \underline{\mathbf{w}}^{(1)} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \underline{\mathbf{w}}^{(1)} .$$

ii) Im $\mathbb{R}^n$ seien gegeben: $\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \underline{\mathbf{u}}^{(2)}, \ldots, \underline{\mathbf{u}}^{(k)} \neq \underline{\mathbf{0}}$, $3 \leq k \leq n$.

(a) Nein, man betrachte etwa im $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$\underline{\mathbf{u}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} , \quad \underline{\mathbf{u}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} , \quad \underline{\mathbf{u}}^{(3)} = \underline{\mathbf{e}}^{(3)} .$$

Man hat die Gleichungen $\underline{\mathbf{u}}^{(1)} = \underline{\mathbf{u}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{u}}^{(2)} = \underline{\mathbf{u}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{u}}^{(3)}$ kann nicht als Linearkombination der anderen dargestellt werden.

(b) Für λ_1, λ_2, $\ldots \lambda_k$, die nicht alle gleich Null seien, gelte

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{u}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{u}}^{(2)} + \ldots \lambda_k \underline{\mathbf{u}}^{(k)} = \underline{\mathbf{0}} \; .$$

Gelte lediglich für ein $i \in \{1, \ldots, k\}$, dass $\lambda_i \neq 0$, so wäre im Widerspruch zur Annahme $\underline{\mathbf{u}}^{(i)} = \underline{\mathbf{0}}$.

Also gibt es mindestens zwei $i \in \{1, \ldots k\}$ mit $\lambda_i \neq 0$, o.E. seien das λ_1 und λ_2.

Es folgt

$$\underline{\mathbf{u}}^{(1)} = -\frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{\mathbf{u}}^{(k)}$$

und analog kann $\underline{\mathbf{u}}^{(2)}$ als Linearkombination der anderen dargestellt werden.

Aufgabe 4.

i) Da $\mathcal{V}$ nach Voraussetzung eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist und wegen $\dim \mathbb{R}^n = n$, existert im $\mathbb{R}^n$ kein weiterer von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(n)}$ linear unabhängiger Vektor.

Also gibt es zu jedem $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, nicht alle gleich Null, mit

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(3)} + \ldots \lambda_n \underline{\mathbf{v}}^{(n)} + \lambda \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \; .$$

Wäre $\lambda = 0$, so wären wegen der linearen Unabhängigkeit der $\underline{\mathbf{v}}^{(i)}$ alle λ_i, $i = 1, \ldots, n$, ebenfalls Null, was einen Widerspruch ergäbe.

Also folgt

$$\underline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)} \quad \text{mit} \;\; \alpha_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda} \; .$$

ii) Aus

$$\underline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)}$$

folgt unmittelbar

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \underline{\mathbf{v}}^{(i)} = \underline{\mathbf{0}}$$

und die lineare Unabhängigkeit der $\underline{\mathbf{v}}^{(i)}$ impliziert für alle $i = 1, \ldots, n$: $\alpha_i = \beta_i$.

Aufgabe 5.

i) Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig, so gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (nicht alle gleich Null) mit

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \cdots + \lambda_k \underline{\mathbf{v}}^{(k)} = \underline{\mathbf{0}} \; .$$

Ist $\underline{\mathbf{v}}^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n$ ein weiterer Vektor, so setze $\lambda_{k+1} = 0$ und es ist

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \cdots + \lambda_k \underline{\mathbf{v}}^{(k)} + \lambda_{k+1} \underline{\mathbf{v}}^{k+1} = \underline{\mathbf{0}}$$

mit $\lambda_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, k+1\}$. Definitionsgemäß sind die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)}, \underline{\mathbf{v}}^{(k+1)}$ damit linear abhängig.

ii) Die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ seien linear unabhängig.

Wären z.B. die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig, so folgte aus Teil *i*) sofort, dass auch $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig wären, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 6.

$\underline{\Rightarrow}$: Ist $U \subset V$ ein Unterraum, so sind die Bedingungen *i*), *ii*) und *iii*) offenbar erfüllt.

$\underline{\Leftarrow}$: Seien die Bedingungen *i*), *ii*) und *iii*) für $U \subset V$ vorausgesetzt. Wir zeigen, dass U ein Unterrraum ist, indem wir die Bedingungen aus Definition 10.1 verifizieren.

$(U, +)$ ist eine kommutative Gruppe:

Aus Eigenschaft *iii*) folgt $-\underline{\mathbf{u}} = (-1) \cdot \underline{\mathbf{u}} \in U$ für alle $\underline{\mathbf{u}} \in U$. Da $\underline{\mathbf{0}} \in U$ nach Eigenschaft *i*) erfüllt ist und $(V, +)$ eine kommutative Gruppe ist, gilt dies auch für $(U, +)$ (die Rechenregeln *vererben* sich).

Es gelten die Assoziativ- und Distributivgesetze:

Da $1 \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}}$ für alle $\underline{\mathbf{v}} \in V$, gilt auch $1 \cdot \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}$ für alle $\underline{\mathbf{u}} \in U \subset V$. Ebenso gilt $(\lambda\mu) \cdot \underline{\mathbf{u}} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{\mathbf{u}})$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $\underline{\mathbf{u}} \in U \subset V$. Sind $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in U$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, so folgt aus den Eigenschaften *ii*) und *iii*), dass $\lambda \cdot \underline{\mathbf{u}}, \mu \cdot \underline{\mathbf{u}}, \lambda \cdot \underline{\mathbf{u}} + \lambda \cdot \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}} \in U$ und somit folgen die Eigenschaften

$$(\lambda + \mu) \cdot \underline{\mathbf{u}} = \lambda \cdot \underline{\mathbf{u}} + \mu \cdot \underline{\mathbf{u}} \qquad \text{und} \qquad \lambda \cdot (\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}}) = \lambda \cdot \underline{\mathbf{u}} + \lambda \cdot \underline{\mathbf{v}}$$

aus den entsprechenden Assoziativ- und Distributivgesetzen für V.

Aufgabe 7.

i) Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \tag{1}$$
$$\alpha + 3\beta + 3\gamma = 0 \tag{2}$$
$$2\alpha - 3\gamma = 0. \tag{3}$$

Aus Gleichung (**??**) erhalten wir $\gamma = \frac{2}{3}\alpha$ und Einsetzen in Gleichung (**??**) ergibt $3\alpha + 3\beta = 0$, also $\beta = -\alpha$. Gleichung (**??**) liefert schließlich $\frac{2}{3}\alpha = 0$, also $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Damit sind die drei Vektoren linear unabhängig.

ii) Zunächst bemerken wir, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $t = 1$ und

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

für $t = 2$. Für diese Werte von t sind die drei Vektoren also linear abhängig.

Nun seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$ mit

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \tag{4}$$
$$\alpha + 2\beta + t\gamma = 0 \tag{5}$$
$$\alpha + 4\beta + t^2\gamma = 0. \tag{6}$$

Aus Gleichung (**??**) folgt $\alpha = -\beta - \gamma$ und Einsetzen in Gleichung (**??**) ergibt $\beta + (t-1)\gamma = 0$, also $\beta = (1-t)\gamma$. Gleichung (**??**) liefert schließlich

$$(t-1)\gamma - \gamma + (4-4t)\gamma + t^2\gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t^2 - 3t + 2)\gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t-1)(t-2)\gamma = 0,$$

sodass $\gamma = 0$ und damit $\beta = \alpha = 0$. Für $t \neq 1, 2$ sind die drei Vektoren also linear unabhängig.

Die gegebenen Vektoren sind insgesamt also genau dann linear unabhängig, wenn $t \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$.

iii) Wegen $(0.0.0)^\top \notin M$ ist M nach dem Kriterium in Aufgabe 1 kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 8.

i) Es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \underline{\mathbf{0}} &= \alpha \cdot \underline{\mathbf{0}} + \underline{\mathbf{0}} \quad \text{(Definition 10.1 } i)) \\
&= \alpha \cdot \underline{\mathbf{0}} + (\alpha \cdot \underline{\mathbf{0}} + (-(\alpha \cdot \underline{\mathbf{0}}))) \quad \text{(Definition 10.1 } i)) \\
&= (\alpha \cdot \underline{\mathbf{0}} + \alpha \cdot \underline{\mathbf{0}}) + (-(\alpha \cdot \underline{\mathbf{0}})) \quad \text{(Definition 10.1 } i)) \\
&= \alpha \cdot (\underline{\mathbf{0}} + \underline{\mathbf{0}}) + (-(\alpha \cdot \underline{\mathbf{0}})) \quad \text{(Definition 10.1 } ii) \text{ } (d)) \\
&= \alpha \cdot \underline{\mathbf{0}} + (-(\alpha \cdot \underline{\mathbf{0}})) \quad \text{(Definition 10.1 } i)) \\
&= \underline{\mathbf{0}} \quad \text{(Definition 10.1 } i))
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
0 \cdot \underline{\mathbf{v}} &= 0 \cdot \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{0}} \quad \text{(Definition 10.1 } i)) \\
&= 0 \cdot \underline{\mathbf{v}} + (\underline{\mathbf{v}} + (-\underline{\mathbf{v}})) \quad \text{(Definition 10.1 } i)) \\
&= 0 \cdot \underline{\mathbf{v}} + (1 \cdot \underline{\mathbf{v}} + (-\underline{\mathbf{v}})) \quad \text{(Definition 10.1 } ii) \text{ } (a)) \\
&= (0 \cdot \underline{\mathbf{v}} + 1 \cdot \underline{\mathbf{v}}) + (-\underline{\mathbf{v}}) \quad \text{(Definition 10.1 } i)) \\
&= (0 + 1) \cdot \underline{\mathbf{v}} + (-\underline{\mathbf{v}}) \quad \text{(Definition 10.1 } ii) \text{ } (d)) \\
&= 1 \cdot \underline{\mathbf{v}} + (-\underline{\mathbf{v}}) \quad \text{(0 ist neutrales Element der Addition in } \mathbb{K}) \\
&= \underline{\mathbf{v}} + (-\underline{\mathbf{v}}) \quad \text{(Definition 10.1 } ii) \text{ } (a)) \\
&= \underline{\mathbf{0}}, \quad \text{(Definition 10.1 } i))
\end{aligned}$$

sodass

$$\alpha \cdot \underline{\mathbf{0}} = 0 \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{0}}.$$

ii) Es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (-\underline{\mathbf{v}}) &= \alpha \cdot (-\underline{\mathbf{v}}) + \underline{\mathbf{0}} \quad \text{(Definition 10.1 } i)) \\
&= \alpha \cdot (-\underline{\mathbf{v}}) + (\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}} + (-(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}}))) \quad \text{(Definition 10.1 } i)) \\
&= (\alpha \cdot (-\underline{\mathbf{v}}) + \alpha \cdot \underline{\mathbf{v}}) + (-(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}})) \quad \text{(Definition 10.1 } i)) \\
&= \alpha \cdot ((-\underline{\mathbf{v}}) + \underline{\mathbf{v}}) + (-(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}})) \quad \text{(Definition 10.1 } ii) \text{ } (d)) \\
&= \alpha \cdot \underline{\mathbf{0}} + (-(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}})) \quad \text{(Definition 10.1 } i)) \\
&= \underline{\mathbf{0}} + (-(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}})) \quad \text{(Teil } i)) \\
&= -(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}}) \quad \text{(Definition 10.1 } i))
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(-\alpha) \cdot \underline{\mathbf{v}} &= (-\alpha) \cdot \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{0}} \quad \text{(Definition 10.1 } i)) \\
&= (-\alpha) \cdot \underline{\mathbf{v}} + (\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}} + (-(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}}))) \quad \text{(Definition 10.1 } i)) \\
&= ((-\alpha) \cdot \underline{\mathbf{v}} + \alpha \cdot \underline{\mathbf{v}}) + (-(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}})) \quad \text{(Definition 10.1 } i)) \\
&= ((-\alpha) + \alpha) \cdot \underline{\mathbf{v}} + (-(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}})) \quad \text{(Definition 10.1 } ii) \text{ } (c)) \\
&= 0 \cdot \underline{\mathbf{v}} + (-(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}})) \quad \text{(additives Inverses in } \mathbb{K}) \\
&= \underline{\mathbf{0}} + (-(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}})) \quad \text{(Teil } i)) \\
&= -(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}}) \quad \text{(Definition 10.1 } i)),
\end{aligned}$$

sodass

$$\alpha \cdot (-\underline{\mathbf{v}}) = (-\alpha) \cdot \underline{\mathbf{v}} = -(\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}}).$$

Aufgabe 9.

i) Wir zeigen die Kriterien aus Aufgabe 1, Präsenzübungsblatt 17.

- Wegen $\underline{\mathbf{0}} \in U_1$ und $\underline{\mathbf{0}} \in U_2$ (U_1 und U_2 sind Unterräume) gilt auch $\underline{\mathbf{0}} \in U_1 \cap U_2$.
- Es seien $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt $\underline{\mathbf{v}} \in U_1$ und $\underline{\mathbf{w}} \in U_1$ und damit $\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}} \in U_1$ (U_1 ist Unterraum). Genauso gilt $\underline{\mathbf{v}} \in U_2$ und $\underline{\mathbf{w}} \in U_2$ und damit $\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}} \in U_2$ (U_2 ist Unterraum). Also ist $\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}} \in U_1 \cap U_2$.
- Es seien $\underline{\mathbf{v}} \in U_1 \cap U_2$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt $\underline{\mathbf{v}} \in U_1$ und damit $\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}} \in U_1$ (U_1 ist Unterraum). Genauso gilt $\underline{\mathbf{v}} \in U_2$ und damit $\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}} \in U_2$ (U_2 ist Unterraum). Also ist $\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}} \in U_1 \cap U_2$.

ii) Es seien $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \text{Spann}(\underline{\mathbf{e}}^{(1)})$ und $U_2 = \text{Spann}(\underline{\mathbf{e}}^{(2)})$. Dann gilt

$$\underline{\mathbf{e}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1 \subseteq U_1 \cup U_2, \quad \underline{\mathbf{e}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_2 \subseteq U_1 \cup U_2,$$

aber

$$\underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_1 \cup U_2.$$

Also ist $U_1 \cup U_2$ nach Aufgabe 1, Präsenzübungsblatt 17, kein Unterraum von V.

Aufgabe 10. Für beliebiges $\underline{\mathbf{x}} \in U_1 \cap U_2$ gibt es Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underline{\mathbf{x}} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$\underline{\mathbf{x}} = \mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist also $\underline{\mathbf{x}}$ genau dann sowohl eine Linearkombination von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ als auch von $\underline{\mathbf{w}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{w}}^{(2)}$, wenn die obigen Koeffizienten λ_1, λ_2, μ_1, und μ_2 das unterbestimmte lineare Gleichungssystem

$$-\lambda_1 + 3\lambda_2 = \mu_1 + 3\mu_2 \tag{7}$$
$$2\lambda_1 - 2\lambda_2 = \mu_1 + \mu_2 \tag{8}$$
$$-\lambda_1 - \lambda_2 = \mu_1 - \mu_2 \tag{9}$$

lösen.

Aus Gleichung (**??**) erhalten wir zunächst $\mu_1 = \mu_2 - \lambda_1 - \lambda_2$. Einsetzen in Gleichung (**??**) ergibt $2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2\mu_2 - \lambda_1 - \lambda_2$, also $\lambda_2 = 3\lambda_1 - 2\mu_2$ und damit $\mu_1 = 3\mu_2 - 4\lambda_1$. Setzen wir dies wiederum in Gleichung (**??**) ein, so erhalten wir $-\lambda_1 + 3(3\lambda_1 - 2\mu_2) = -4\lambda_1 + 6\mu_2$, also $\mu_2 = \lambda_1$ und damit $\lambda_2 = \lambda_1$ und $\mu_1 = -\lambda_1$.

Für beliebiges $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ ist das obige Gleichungssystem also genau dann erfüllt, wenn $\mu_2 = \lambda_1$, $\lambda_2 = \lambda_1$ und $\mu_1 = -\lambda_1$. Insbesondere ist $\underline{\mathbf{x}}$ für diese Koeffizienten also von der Form

$$\underline{\mathbf{x}} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Eine Basis für $U_1 \cap U_2$ ist also gegeben durch den Vektor (das 1-Tupel, siehe Definition 10.3) $(2, 0, -2)^\top$.

Aufgabe 11. Es seien

$$V = \operatorname{Spann}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^4$$

und $\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = (2, -1, 0, 1)^\top$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)} = (-3, 0, 2, 5)^\top$, $\underline{\mathbf{v}}^{(3)} = (0, -3, 4, 13)^\top$. Die Dimension von V, also die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in V, ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren in der Menge $\{\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}\}$, denn jeder weitere Vektor in V ist eine Linearkombination der drei Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$.

Nun ist

$$\underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 3 \cdot \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + 2 \cdot \underline{\mathbf{v}}^{(2)}.$$

Es seien außerdem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \cdot \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \beta \cdot \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{0}}$, d.h.

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten und der dritten Gleichung folgt sofort $\alpha = \beta = 0$, sodass $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ linear unabhängig sind.

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in $\{\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}\}$ ist also 2 und damit ist $\dim V = 2$.

Aufgabe 12.

i) Wir zeigen, dass

$$\mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)},\dots,\underline{\mathbf{v}}^{(k)}) = \mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(2)},\underline{\mathbf{v}}^{(2)}-\underline{\mathbf{v}}^{(3)},\dots,\underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(k)},\underline{\mathbf{v}}^{(k)}).$$

Hierzu bemerken wir zunächst, dass

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{v}}^{(k)} &= (\underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(k)}) + \underline{\mathbf{v}}^{(k)},\\
\underline{\mathbf{v}}^{(k-1)} &= (\underline{\mathbf{v}}^{(k-2)}-\underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}) + (\underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(k)}) + \underline{\mathbf{v}}^{(k)},\\
&\vdots\\
\underline{\mathbf{v}}^{(1)} &= (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(2)}) + (\underline{\mathbf{v}}^{(2)}-\underline{\mathbf{v}}^{(3)}) + \dots + (\underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(k)}) + \underline{\mathbf{v}}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)},\dots,\underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(2)},\underline{\mathbf{v}}^{(2)}-\underline{\mathbf{v}}^{(3)},\dots,\underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(k)},\underline{\mathbf{v}}^{(k)})$$

und daraus folgt

$$\mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)},\dots,\underline{\mathbf{v}}^{(k)}) \subset \mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(2)},\underline{\mathbf{v}}^{(2)}-\underline{\mathbf{v}}^{(3)},\dots,\underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(k)},\underline{\mathbf{v}}^{(k)}).$$

Umgekehrt gilt

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(2)},\underline{\mathbf{v}}^{(2)}-\underline{\mathbf{v}}^{(3)},\dots,\underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(k)},\underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)},\dots,\underline{\mathbf{v}}^{(k)}),$$

sodass

$$\mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(2)},\underline{\mathbf{v}}^{(2)}-\underline{\mathbf{v}}^{(3)},\dots,\underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(k)},\underline{\mathbf{v}}^{(k)}) \subset \mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)},\dots,\underline{\mathbf{v}}^{(k)})$$

und aus beiden Inklusionen folgt die gewünschte Gleichheit.

ii) Es seien $\underline{\mathbf{v}}^{(1)},\dots,\underline{\mathbf{v}}^{(k)}$ linear unabhängig und $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(2)}) + \lambda_2(\underline{\mathbf{v}}^{(2)}-\underline{\mathbf{v}}^{(3)}) + \dots + \lambda_{k-1}(\underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(k)}) + \lambda_k\underline{\mathbf{v}}^{(k)} = \underline{\mathbf{0}}.$$

Dann gilt

$$\lambda_1\underline{\mathbf{v}}^{(1)} + (\lambda_2-\lambda_1)\underline{\mathbf{v}}^{(2)} + \dots + (\lambda_k-\lambda_{k-1})\underline{\mathbf{v}}^{(k)} = \underline{\mathbf{0}}$$

und da $\underline{\mathbf{v}}^{(1)},\dots,\underline{\mathbf{v}}^{(k)}$ linear unabhängig sind folgt

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2-\lambda_1 = 0, \quad \dots \quad ,\lambda_k-\lambda_{k-1} = 0.$$

Damit folgt induktiv $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, sodass

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(2)},\underline{\mathbf{v}}^{(2)}-\underline{\mathbf{v}}^{(3)},\dots,\underline{\mathbf{v}}^{(k-1)}-\underline{\mathbf{v}}^{(k)},\underline{\mathbf{v}}^{(k)}$$

linear unabhängig sind.