Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Selina Schwindling

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Tag 7, Thema 1
Die Geometrie des $\mathbb{R}^n$
Blokkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Kapitel 10.2 "Die Geometrie des $\mathbb{R}^n$"

Übungen

Aufgabe 1.

i) Zeigen Sie, dass durch

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad \underline{\mathbf{x}} \mapsto \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

und durch

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad \underline{\mathbf{x}} \mapsto \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

jeweils eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert ist.

ii) Finden Sie Konstanten c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$c_1\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty \le \|\underline{\mathbf{x}}\|_2 \le c_2\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n\,.$$

iii) Skizzieren Sie für die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$ jeweils die Menge aller Punkte mit der Norm 1.

Aufgabe 2. Im $\mathbb{R}^4$ seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} U &:= \mathrm{Spann}\big(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}\big)\,, \qquad V := \mathrm{Spann}\big(\underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{v}}^{(4)}\big)\,, \\ W &:= \mathrm{Spann}\big(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{v}}^{(4)}\big)\,. \end{aligned}$$

Bitte wenden.

i) Es bezeichne $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ den ersten kanonischen Basisvektor des $\mathbb{R}^4$. Gilt $\underline{\mathbf{e}}^{(1)} \in V$?

ii) Bestimmen Sie $\dim W$.

iii) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von W.

iv) Bestimmen Sie $U \cap V$.

v) Ist $W - U$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$?

Aufgabe 3.

i) Betrachten Sie den Unterraum

$$V = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Dimension von V und geben Sie eine Orthonormalbasis von V an.

ii) Ergänzen Sie die Orthonormalbasis von V aus *i)* zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ und stellen Sie den kanonischen Einheitsvektor $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ als Linearkombination dieser Basisvektoren dar.

Aufgabe 4. Es sei

$$M = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ \underline{\mathbf{x}} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ 1 \le \lambda \le 2 \right\} .$$

i) Ist M ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$?

ii) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $M^{\perp}$.

iii) Bestimmen Sie $(M^{\perp})^{\perp}$.

iv) Bestimmen Sie $\big((M^{\perp})^{\perp}\big)^{\perp}$.

Aufgabe 5. Es seien $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}}$, $\underline{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie (durch elementare Rechnung) den Entwicklungssatz

$$\underline{\mathbf{x}} \times (\underline{\mathbf{y}} \times \underline{\mathbf{z}}) = \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle \underline{\mathbf{y}} - \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle \underline{\mathbf{z}} \ .$$

Aufgabe 6.

i) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte gegeben:

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \ \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der durch $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{c}}$ verlaufenden Ebene.

ii) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter sei E die Ebene, die von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ aufgespannt wird und den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält.

Geben Sie eine Parameterdarstellung und die Hessesche Normalform von E an.

iii) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Gerade

$$G = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ \ x_2 = 1 + x_1 \ , \ \ x_3 = 1 - x_1\}$$

und der Punkt

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E im $\mathbb{R}^3$, die $\underline{\mathbf{a}}$ und G enthält. Machen Sie eine Probe.

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für alle $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ gelten.

i) $\langle \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}} \rangle = \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 - \|\underline{\mathbf{y}}\|^2$.

ii) $\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|^2 = \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 - 2\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 = \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 - 2\|\underline{\mathbf{x}}\|\,\|\underline{\mathbf{y}}\| \cos(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2$
(Verallgemeinerter Satz des Pythagoras bzw. verallgemeinerter Cosinussatz).

iii) $\|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\|^2 - \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|^2 = 4\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle$.

iv) $\|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\|^2 + \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|^2 = 2\|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + 2\|\underline{\mathbf{y}}\|^2$
(Parallelogramm-Gleichung).

Bitte wenden.

Aufgabe 8. Betrachten Sie die Menge $V = \{f := [0,1] \to \mathbb{R}\}$ aller reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$.

i) Zeigen Sie, dass V mit den üblichen Verknüpfungen der Addition zweier Funktionen und der Multiplikation mit einem Skalar ein Vektorraum ist.

ii) Es sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für paarweise verschiedene Zahlen $s_1, ..., s_m \in [0,1]$ die Funktionen

$$f_j(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = s_j, \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases} \qquad j = 1, ..., m$$

linear unabhängig sind.

iii) Was kann man über die Dimension des Vektorraumes V aussagen?

iv) Ist durch $\langle f, g \rangle := f(0)g(0)$ ein Skalarprodukt auf V definiert?

Aufgabe 9.

i) Liegen die Punkte $(3,0,4)$, $(1,1,1)$ und $(-1,2,-2)$ auf einer Geraden?

ii) Es seien $A = (0,1,0)$, $B = (4,4,0)$ und $C = (0,1,5)$.

(a) Bestimmen Sie alle Innenwinkel im Dreieck $\triangle ABC$.

(b) Bestimmen Sie die längste Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

Aufgabe 10. Es sei

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{p(x) = ax^2 + bx + c \colon a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

der Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 in einer Variablen x mit reellen Koeffizienten.

i) Zeigen Sie, dass durch

$$\|p(x)\|_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

eine Norm auf $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gegeben ist.

ii) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle ax^2 + bx + c, \tilde{a}x^2 + \tilde{b}x + \tilde{c} \rangle_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} := a\tilde{a} + b\tilde{b} + c\tilde{c}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gegeben ist.

iii) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Polynomen $p(x) = x - 1$ und $q(x) = x^2 - 2x + 1$.

iv) Zeigen Sie, dass die Polynome 1, x und x^2 eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ bilden.

v) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement des Unterraumes

$$U := \text{Spann}\big(2x^2 - 5x + 1, 3x - 3\big).$$

von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 11.

i) Es seien $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n - \{\underline{\mathbf{0}}\}$ mit $\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle = 0$. Zeigen Sie, dass $\underline{\mathbf{x}}$ und $\underline{\mathbf{y}}$ linear unabhängig sind.

ii) Es seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ von $\text{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$.

iii) Ergänzen Sie $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, d.h. finden Sie $\underline{\mathbf{f}}^{(3)} \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)})$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 12. Es seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Orthonormalbasis $(\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)}, \underline{\mathbf{w}}^{(3)}, \underline{\mathbf{w}}^{(4)})$ von $\mathbb{R}^4$ mit der Eigenschaft

$$\text{Spann}(\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)}, \underline{\mathbf{w}}^{(3)}) = \text{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}).$$

Aufgabe 13.

i) Berechnen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E_1, die durch die drei Punkte $(-1, 1, 1)$, $(2, 1, 0)$ und $(0, 0, 2)$ verläuft.

ii) Berechnen Sie die Schnittgerade der Ebene E_1 mit der Ebene

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 := x_3 = 0 \right\}.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 14.

i) Es seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bilden die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\text{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)})$.

ii) Es sei

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie $U^{\perp}$.

iii) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ beträgt der Winkel zwischen den Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

genau $90°$?

iv) Gegeben seien die Punkte

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform der durch $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$ und $\underline{\mathbf{c}}$ verlaufenden Ebene E.