Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Selina Schwindling

Lösungen
Tag 7, Thema 1
Die Geometrie des $\mathbb{R}^n$
Blokkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

Aufgabe 1.

i) Wir verifizieren die Bedingungen aus Definition 10.5.

Zu $\|\cdot\|_1$*:*

- Da $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt
$$\|\underline{\mathbf{x}}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \geq 0$$
und
$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{x}}\|_1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |x_j| = 0 \quad \text{für alle } \ j = 1, \ \ldots, \ n \\ &\Leftrightarrow \quad x_j = 0 \quad \text{für alle } \ j = 1, \ \ldots, \ n \\ &\Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \end{aligned}$$
für alle $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$.
- Ist $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt
$$\|\lambda\underline{\mathbf{x}}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda x_j| = \sum_{j=1}^{n} |\lambda||x_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |x_j| = |\lambda|\|\underline{\mathbf{x}}\|_1 \ .$$
- Sind $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$, so folgt aus der Dreiecksungleichung
$$|a - b| \leq |a| + |b| \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$
für reelle Zahlen, dass
$$\|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| + |y_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \sum_{j=1}^{n} |y_j| = \|\underline{\mathbf{x}}\|_1 + \|\underline{\mathbf{y}}\|_1 \ .$$

Also ist $\|\cdot\|_1$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm.

Zu $\|\cdot\|_\infty$*:*

- Für $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty = \max\big\{|x_1|,\ \ldots,\ |x_n|\big\} \geq |x_1| \geq 0$$

und analog

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \max\big\{|x_1|,\ \ldots,\ |x_n|\big\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad |x_j| = 0 \quad \text{für alle } \ j = 1,\ \ldots,\ n \\ &\Leftrightarrow \quad x_j = 0 \quad \text{für alle } \ j = 1,\ \ldots,\ n \\ &\Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}\ . \end{aligned}$$

- Sind $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda\underline{\mathbf{x}}\|_\infty &= \max\big\{|\lambda x_1|,\ \ldots,\ |\lambda x_n|\big\} = \max\big\{|\lambda||x_1|,\ \ldots,\ |\lambda||x_n|\big\} \\ &= |\lambda| \max\big\{|x_1|,\ \ldots,\ |x_n|\big\} = |\lambda|\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty\ . \end{aligned}$$

- Sind $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$, so folgt aus

$$|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \leq \max\big\{|x_1|,\ \ldots,\ |x_n|\big\} + \max\big\{|y_1|,\ \ldots,\ |y_n|\big\}$$

durch Übergang zum Maximum über alle $j = 1, \ldots, n$ auf der linken Seite

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\|_\infty &= \max\big\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\big\} \\ &\leq \max\big\{|x_1|,\ \ldots,\ |x_n|\big\} + \max\big\{|y_1|,\ \ldots,\ |y_n|\big\}\ . \end{aligned}$$

Also ist $\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm.

ii) Für $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{x}}\|_2 &= \left[\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{j=1}^n \Big(\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}\Big)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big[n\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty^2\Big]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty \end{aligned}$$

und

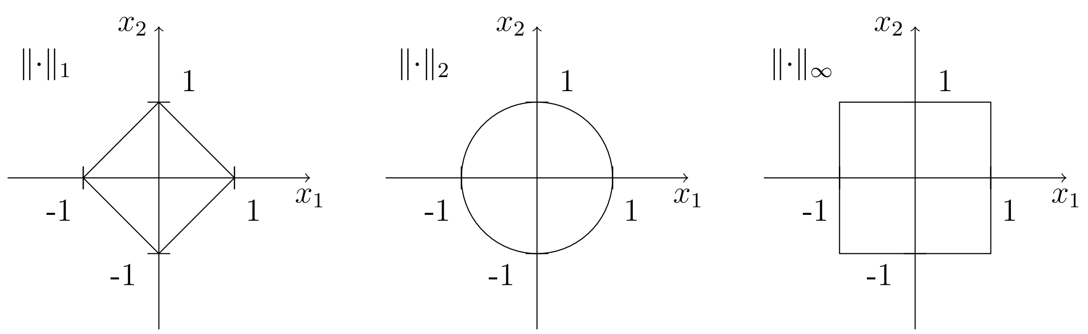
$$\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty^2 = \Big(\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}\Big)^2 \leq \sum_{j=1}^n |x_j|^2,$$

sodass

$$c_1\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty \leq \|\underline{\mathbf{x}}\|_2 \leq c_2\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty$$

mit $c_1 = 1$ und $c_2 = \sqrt{n}$.

iii)



Aufgabe 2.

i) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

würde $\mu = 1$ sowie $\mu = 0$ folgen, also gilt $\underline{\mathbf{e}}^{(1)} \notin V$.

ii) Es gilt

$$2\underline{\mathbf{v}}^{(1)} - \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{v}}^{(4)} ,$$

d.h. die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(4)}$ sind nicht linear unabhängig und damit ist $\dim W \leq 3$.

Aus

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)} + \lambda_3 \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \underline{\mathbf{0}}$$

folgt jedoch

$$0 = \lambda_1 + \lambda_2 \, , \qquad 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \, , \qquad 0 = \lambda_1$$

und damit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig sodass $\dim W = 3$.

iii) Zur Bestimmung einer Orthonormalbasis von W setzt man nach dem Gram-Schmidtschen Verfahren etwa

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} := \frac{\underline{\mathbf{v}}^{(1)}}{\|\underline{\mathbf{v}}^{(1)}\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Außerdem definieren wir

$$\begin{aligned}
\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(2)} &:= \underline{\mathbf{v}}^{(2)} - \langle \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \rangle \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} , \\
\underline{\mathbf{f}}^{(2)} &:= \frac{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(2)}}{\|\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(2)}\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(3)} &:= \underline{\mathbf{v}}^{(3)} - \langle \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \rangle \underline{\mathbf{f}}^{(1)} - \langle \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \rangle \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\quad - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\underline{\mathbf{f}}^{(3)} &= \frac{\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(3)}}{\|\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(3)}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Eine Orthonormalbasis $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)})$ von W ist damit gefunden.

iv) Für beliebiges $\underline{\mathbf{x}} \in U \cap V$ gibt es Koeffizienten $\lambda, \mu, \overline{\lambda}, \overline{\mu} \in \mathbb{R}$ mit

$$\underline{\mathbf{x}} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\underline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overline{\mu} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es ist also $\underline{\mathbf{x}}$ genau dann sowohl eine Linearkombination von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ als auch von $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(4)}$, wenn die obigen Koeffizienten λ, μ, $\overline{\lambda}$, und $\overline{\mu}$ das lineare Gleichungssystem

$$\lambda + \mu = \overline{\mu} \tag{1}$$
$$\lambda + \mu = \overline{\lambda} + \overline{\mu} \tag{2}$$
$$\lambda = 2\overline{\mu} \tag{3}$$

lösen.

Aus Gleichungen (**??**) und (**??**) erhalten wir zunächst $\overline{\lambda} = 0$. Aus Gleichungen (**??**) und (**??**) folgt außerdem $\lambda = 2\overline{\mu}$ und $\mu = -\overline{\mu}$.

Für beliebiges $\overline{\mu} \in \mathbb{R}$ ist das obige Gleichungssystem also genau dann erfüllt, wenn $\overline{\lambda} = 0$, $\lambda = 2\overline{\mu}$ und $\mu = -\overline{\mu}$. Insbesondere ist $\underline{\mathbf{x}}$ für diese Koeffizienten also von der Form

$$\underline{\mathbf{x}} = 2\overline{\mu} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \overline{\mu} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{\mu} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

d.h. es gilt $U \cap V = \operatorname{Spann}((1,1,1,2)^\top)$.

$v)$ Anhand von $\underline{\mathbf{0}} \in W$ und $\underline{\mathbf{0}} \in U$ erkennt man $\underline{\mathbf{0}} \notin W - U$, sodass $W - U$ kein Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 3.

$i)$ Zunächst bemerken wir, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin V,$$

sodass $\dim V \leq 3$. Für

$$\underline{\mathbf{g}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{g}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{g}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gilt außerdem $\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \underline{\mathbf{g}}^{(2)}, \underline{\mathbf{g}}^{(3)} \in V$ und aus

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt sofort $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$, sodass $\underline{\mathbf{g}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{g}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{g}}^{(3)}$ auch linear unabhängig sind. Daraus folgt $\dim V \geq 3$, also $\dim V = 3$ und $(\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \underline{\mathbf{g}}^{(2)}, \underline{\mathbf{g}}^{(3)})$ ist eine Basis von V.

Mithilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens bestimmen wir nun eine Orthonormalbasis von V. Zunächst setzen wir

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{\underline{\mathbf{g}}^{(1)}}{\|\underline{\mathbf{g}}^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Außerdem definieren wir

$$\begin{aligned}
\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(2)} &= \underline{\mathbf{g}}^{(2)} - \langle \underline{\mathbf{g}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \rangle \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\underline{\mathbf{f}}^{(2)} = \frac{\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(2)}}{\|\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(3)} &= \underline{\mathbf{g}}^{(3)} - \langle \underline{\mathbf{g}}^{(3)}, \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \rangle \underline{\mathbf{f}}^{(1)} - \langle \underline{\mathbf{g}}^{(3)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \rangle \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\underline{\mathbf{f}}^{(3)} = \frac{\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(3)}}{\|\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(3)}\|} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Eine Orthonormalbasis $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)})$ von V ist damit gefunden.

ii) Der Vektor

$$\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist wie in Teil *i)* erwähnt kein Element von V, also linear unabhängig zu den Vektoren $\underline{\mathbf{f}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{f}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{f}}^{(3)}$. Außerdem gilt

$$\langle \underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(4)}, \underline{\mathbf{x}} \rangle = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

für alle $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4$, sodass

$$\langle \underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(4)}, \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \rangle = \langle \underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(4)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \rangle = \langle \underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(4)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)} \rangle = 0.$$

Mit

$$\underline{\mathbf{f}}^{(4)} = \frac{\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(4)}}{\|\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(4)}\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist also $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)}, \underline{\mathbf{f}}^{(4)})$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$.

Nach Satz 10.2 gilt

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{e}}^{(1)} &= \sum_{k=1}^{4} \langle \underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(k)} \rangle \underline{\mathbf{f}}^{(k)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{6}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{3}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle \underline{\mathbf{f}}^{(3)} + \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \underline{\mathbf{f}}^{(4)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{6}} \underline{\mathbf{f}}^{(2)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \underline{\mathbf{f}}^{(3)} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{f}}^{(4)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.

i) Es ist $\underline{\mathbf{0}} \notin M$, sodass M kein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

ii) Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned}
M^{\perp} &= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \left\langle \underline{\mathbf{x}}, \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \text{ für alle } \lambda \in [1,2] \right\} \\
&= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \left\langle \underline{\mathbf{x}}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \\
&= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 = x_1 + x_3 \right\} \\
&= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \underline{\mathbf{x}} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

mit $\dim M^{\perp} = 2$. Nach dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren setzen wir

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \right\rangle \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\underline{\mathbf{f}}^{(2)} = \frac{\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(2)}}{\|\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ eine Orthonormalbasis von $M^{\perp}$.

iii) Die Rechnung in Teil *ii)* zeigt, dass

$$(M^{\perp})^{\perp} = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \underline{\mathbf{x}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

iv) Die Rechnung in Teil *ii)* zeigt, dass $\left((M^{\perp})^{\perp}\right)^{\perp} = M^{\perp}$.

Aufgabe 5. Für $\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)^\top, \underline{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)^\top, \underline{\mathbf{z}} = (z_1, z_2, z_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned}
&\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle \underline{\mathbf{y}} - \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle \underline{\mathbf{z}} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1y_1z_1 + x_2y_1z_2 + x_3y_1z_3 \\ x_1y_2z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_2z_3 \\ x_1y_3z_1 + x_2y_3z_2 + x_3y_3z_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1y_1z_1 + x_2y_2z_1 + x_3y_3z_1 \\ x_1y_1z_2 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_2 \\ x_1y_1z_3 + x_2y_2z_3 + x_3y_3z_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2y_1z_2 - x_2z_1y_2 - x_3y_3z_1 + x_3y_1z_3 \\ x_3y_2z_3 - x_3y_3z_2 - x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 \\ x_1y_3z_1 - x_1y_1z_3 - x_2y_2z_3 + x_2y_3z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2(y_1z_2 - z_1y_2) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3) \\ x_3(y_2z_3 - y_3z_2) - x_1(y_1z_2 - z_1y_2) \\ x_1(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2(y_2z_3 - y_3z_2) \end{pmatrix} \\
&= \underline{\mathbf{x}} \times \begin{pmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ y_3z_1 - y_1z_3 \\ y_1z_2 - z_1y_2 \end{pmatrix} \\
&= \underline{\mathbf{x}} \times (\underline{\mathbf{y}} \times \underline{\mathbf{z}}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.

i) Es seien

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Parameterdarstellung der Ebene E, die durch die Punkte $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$ und $\underline{\mathbf{c}}$ verläuft, ist

$$\begin{aligned}
E &= \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}} + \alpha\underline{\mathbf{v}} + \beta\underline{\mathbf{w}}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Für die Hessesche Normalform berechnen wir

$$\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}}\| = \sqrt{2}$$

und setzen

$$\underline{\mathbf{N}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Rechnung

$$\langle \underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{a}} \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \pm\sqrt{2}$$

zeigt schließlich, dass die richtige Normierung durch

$$\underline{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist und die Hessesche Normalform von E lautet

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{x}} \right\rangle - \sqrt{2} = 0 \right\}.$$

ii) Als Parameterdarstellung der Ebene ergibt sich unmittelbar aus der Aufgabenstellung

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für die Hessesche Normalform berechnen wir

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} \times \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|\underline{\mathbf{v}}^{(1)} \times \underline{\mathbf{v}}^{(2)}\| = \sqrt{6}$$

und setzen

$$\underline{\mathbf{N}} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Rechnung

$$\left\langle \underline{\mathbf{N}}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{6}}$$

zeigt schließlich, dass die richtige Normierung durch

$$\underline{\mathbf{N}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist und die Hessesche Normalform von E lautet

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{x}} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0 \right\}.$$

iii) Mit der Wahl $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ sieht man, dass die Punkte

$$\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ebenfalls in der Ebene liegen. Zwei Richtungsvektoren für E sind also gegeben durch

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Hessesche Normalform berechnen wir

$$\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}}\| = \sqrt{2}$$

und setzen

$$\underline{\mathbf{N}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Rechnung

$$\langle \underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{a}} \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \pm\sqrt{2}$$

zeigt schließlich, dass die richtige Normierung durch

$$\underline{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist und die Hessesche Normalform von E lautet

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{x}} \right\rangle - \sqrt{2} = 0 \right\}.$$

Als Probe hat man neben $\underline{\mathbf{a}} \in E$ (per Konstruktion) auch die Beziehung für $\underline{\mathbf{x}} \in G$, nämlich

$$\langle \underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + x_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + x_1 + 1 - x_1) = \sqrt{2},$$

sodass E tatsächlich $\underline{\mathbf{a}}$ und G enthält.

Aufgabe 7. Wir benutzen die Rechenregeln aus Definition 10.6 sowie die Beziehung $\|\underline{\mathbf{v}}\| = \langle \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{v}} \rangle^{\frac{1}{2}}$ für alle $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$.

i) Es gilt

$$\begin{aligned}\langle \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}} \rangle &= \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}} \rangle + \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}} \rangle \\ &= \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle \underbrace{-\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle + \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle}_{=0} - \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle \\ &= \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 - \|\underline{\mathbf{y}}\|^2.\end{aligned}$$

ii) Es gilt

$$\begin{aligned}\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|^2 &= \langle \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}} \rangle \\ &= \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}} \rangle - \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}} \rangle \\ &= \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle - \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle - \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle + \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle \\ &= \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 - 2\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 \\ &= \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 - 2\|\underline{\mathbf{x}}\|\|\underline{\mathbf{y}}\| \frac{\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle}{\|\underline{\mathbf{x}}\|\|\underline{\mathbf{y}}\|} + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 \\ &= \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 - 2\|\underline{\mathbf{x}}\|\|\underline{\mathbf{y}}\| \cos(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2.\end{aligned}$$

iii) Mit der Formel aus Teil *ii*) berechnen wir

$$\begin{aligned}\|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\|^2 - \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|^2 &= \langle \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}} \rangle - \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + 2\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle - \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 \\ &= \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}} \rangle + \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}} \rangle - \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + 2\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle - \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 \\ &= \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle + \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle + \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle + \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle - \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + 2\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle - \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 \\ &= \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + 2\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 - \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + 2\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle - \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 \\ &= 4\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle.\end{aligned}$$

iv) Mit der Formel aus Teil *ii*) berechnen wir analog zur Rechnung in Teil *iii*)

$$\begin{aligned}\|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\|^2 + \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|^2 &= \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + 2\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 + \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 - 2\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 \\ &= 2\|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + 2\|\underline{\mathbf{y}}\|^2.\end{aligned}$$

Aufgabe 8.

i) Wir verifizieren die Bedingungen aus Definition 10.1.

$(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe:

- Es ist $\underline{\mathbf{0}}\colon [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ das neutrale Element der Addition.
- Ist $f \in V$, so ist
$$-f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -f(x)$$
das additive Inverse zu f.

- Sind $f, g, h \in V$, so gilt
$$f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x)$$
für alle $x \in [0,1]$ und somit $f + (g + h) = (f + g) + h$.
- Sind $f, g \in V$, so gilt
$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$
für alle $x \in [0,1]$ und somit $f + g = g + f$.

Es gelten Assoziativ- und Distributivgesetze:
Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g \in V$. Dann gilt $1 \cdot f = f$. Außerdem gilt
$$((\lambda\mu) \cdot f)(x) = \lambda\mu \cdot f(x) = (\lambda \cdot (\mu \cdot f))(x)$$
und
$$((\lambda + \mu) \cdot f)(x) = (\lambda + \mu) \cdot f(x) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(x) = (\lambda \cdot f)(x) + (\mu \cdot f)(x)$$
sowie
$$(\lambda \cdot (f + g))(x) = \lambda \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x) = (\lambda \cdot f)(x) + (\lambda \cdot g)(x)$$
für alle $x \in [0,1]$.
Also ist $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

ii) Seien $s_1, \ldots, s_m \in [0,1]$ paarweise verschieden und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit
$$\lambda_1 \cdot f_1 + \cdots + \lambda_m \cdot f_m = \underline{\mathbf{0}},$$
d.h.
$$\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_m f_m(x) = 0$$
für alle $x \in [0,1]$. Dann gilt
$$\lambda_j = \lambda_j f_j(s_j) = \lambda_1 f_1(s_j) + \cdots + \lambda_m f_m(s_j) = 0$$
für alle $j = 1, \ldots, m$, denn $s_1, \ldots, s_m \in [0,1]$ sind paarweise verschieden, d.h. $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$. Also sind $f_1, \ldots, f_m$ linear unabhängig.

iii) Sei $m \in \mathbb{N}$. Nach Teil *ii)* sind die zu den Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m} \in [0,1]$ gegebenen Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ linear unabhängig. Da $m \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben war, besitzt V beliebig große Familien linear unabhängiger Vektoren. Damit ist V nicht endlichdimensional.

iv) Die Abbildung
$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \longmapsto f(0)g(0)$$
definiert kein Skalarprodukt auf V, denn der Vektor
$$f \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
ist ungleich dem Nullvektor, aber es gilt
$$\langle f, f \rangle = f(0)f(0) = 0.$$

Aufgabe 9.

i) Die Gerade durch die beiden Punkte $(3, 0, 4)$ und $(1, 1, 1)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} g &= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Nun sei $t \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $t = -2$ und da für diesen Wert von t auch die erste und die dritte Gleichung erfüllt sind, erfüllt der Punkt $(-1, 2, -2)$ die Geradengleichung, sodass alle drei Punkte auf einer Geraden liegen.

ii) (a) Es seien

$$\underline{\mathbf{x}} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{y}} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und

$$\underline{\mathbf{z}} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

die Richtungsvektoren der drei Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle &= 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 5 = 0, \\ \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle &= 4 \cdot (-4) + 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 5 = 25, \\ \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle &= 0 \cdot (-4) + 0 \cdot (-3) + 5 \cdot 5 = 25 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{x}}\| &= \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = 5, \\ \|\underline{\mathbf{y}}\| &= \sqrt{0^2 + 0^2 + 5^2} = 5, \\ \|\underline{\mathbf{z}}\| &= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \cos(\angle(AB, AC)) &= \frac{\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle}{\|\underline{\mathbf{x}}\| \|\underline{\mathbf{y}}\|} = 0, \\ \cos(\angle(AB, BC)) &= \frac{\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle}{\|\underline{\mathbf{x}}\| \|\underline{\mathbf{z}}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos(\angle(AC, BC)) &= \frac{\langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle}{\|\underline{\mathbf{y}}\| \|\underline{\mathbf{z}}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}
\angle(AB, AC) &= \arccos(0) = \frac{\pi}{2} = 90°,\\
\angle(AB, BC) &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} = 45°,\\
\angle(AC, BC) &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} = 45°.
\end{aligned}$$

(b) Die längste Seite des Dreiecks ist wie in Teil (a) berechnet die Seite BC. Der Flächeninhalt $\mathcal{A}$ von $\triangle ABC$ ist also die Hälfte des Flächeninhaltes des von den beiden kürzeren Seiten AB und AC aufgespannten Parallelogramms (was in diesem Fall wegen $\angle(AB, AC) = 90°$ sogar ein Quadrat ist). Diesen berechnen wir mit Hilfe des Vektorproduktes (siehe Seite 208). Wir erhalten

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}}\| = \frac{1}{2}\|\underline{\mathbf{x}}\|\|\underline{\mathbf{y}}\||\sin(\angle(AB, AC))| = \frac{1}{2}\|\underline{\mathbf{x}}\|\|\underline{\mathbf{y}}\| = \frac{25}{2}.$$

Aufgabe 10.

i) Wir verifizieren die Bedingungen aus Definition 10.5

- Für $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gilt

$$\|p(x)\|_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \left\|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right\| \geq 0$$

und

$$\begin{aligned}
\|p(x)\|_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right\| = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad p(x) = \underline{\mathbf{0}} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

- Für $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|\lambda p(x)\|_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2 + (\lambda c)^3} = |\lambda|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = |\lambda|\|p(x)\|_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}.$$

- Für $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ mit $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ und $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$

gilt

$$
\begin{aligned}
\|p(x)+q(x)\|_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} &= \|(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+c_1+c_2\|_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\\
&= \left\| \begin{pmatrix} a_1\\ b_1\\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2\\ b_2\\ c_2 \end{pmatrix} \right\|\\
&\leq \left\| \begin{pmatrix} a_1\\ b_1\\ c_1 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} a_2\\ b_2\\ c_2 \end{pmatrix} \right\|\\
&= \|p(x)\|_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} + \|q(x)\|_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

Also ist $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$ eine Norm auf $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

ii) Für $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ mit $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ und $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ gilt

$$
\langle p(x), q(x)\rangle_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = \left\langle \begin{pmatrix} a_1\\ b_1\\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2\\ b_2\\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle
$$

und da jedes Polynom aus $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ durch seine Koeffizienten eindeutig bestimmt ist, übertragen sich alle Eigenschaften (siehe Definition 10.6) des Standardskalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle$ von $\mathbb{R}^3$ auf $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$.

iii) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\cos(p(x), q(x)) &= \frac{\langle p(x), q(x)\rangle_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}}{\|p(x)\|\|q(x)\|}\\
&= \frac{0\cdot 1 + 1\cdot(-2) + (-1)\cdot 1}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}\\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2},
\end{aligned}
$$

sodass der Winkel α zwischen $p(x)$ und $q(x)$ gegeben ist durch

$$
\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi = 150°.
$$

iv) Es seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$
\alpha\cdot 1 + \beta\cdot x + \gamma\cdot x^2 = \underline{\mathbf{0}},
$$

d.h.

$$
\alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x = 0$ folgt $\alpha = 0$ und für $x = \pm 1$ erhalten wir die Gleichungen $\beta + \gamma = 0$ und $-\beta + \gamma = 0$, aus denen $\beta = \gamma = 0$ folgt. Wegen

$$
\|1\|_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = \|x\|_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = \|x^2\|_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = 1
$$

und

$$\begin{aligned}
\langle 1, x\rangle_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} &= \sqrt{0\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0} = 0,\\
\langle 1, x^2\rangle_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} &= \sqrt{0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0} = 0,\\
\langle x, x^2\rangle_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} &= \sqrt{0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 0} = 0
\end{aligned}$$

ist $(1, x, x^2)$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

v) Sei $p(x) = ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Dann gilt $p \in U^\perp$ genau dann, wenn die Gleichungen

$$0 = \langle 2x^2-5x+1, p(x)\rangle_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = 2a-5b+c$$

und

$$0 = \langle 3x-3, p(x)\rangle_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})} = 3b-3c$$

erfüllt sind. Die letzte Identität ist äquivalent zu $b = c$, sodass weiter

$$2a-5b+c=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2a-5b+b=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=2b$$

folgt. Somit gilt

$$U^\perp = \left\{2tx^2+tx+t\colon t\in\mathbb{R}\right\} = \mathrm{Spann}(2x^2+x+1).$$

Aufgabe 11.

i) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha\cdot\underline{\mathbf{x}}+\beta\cdot\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{0}}.$$

Dann gilt

$$0 = \langle\underline{\mathbf{0}}, \underline{\mathbf{y}}\rangle = \langle\alpha\cdot\underline{\mathbf{x}}+\beta\cdot\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}}\rangle = \alpha\underbrace{\langle\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\rangle}_{=0}+\beta\|\underline{\mathbf{y}}\|^2 = \beta\|\underline{\mathbf{y}}\|^2.$$

Wegen $\underline{\mathbf{y}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ folgt daraus $\beta = 0$, woraus mit der obigen Gleichung wegen $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ wiederum $\alpha = 0$ folgt. Also sind $\underline{\mathbf{x}}$ und $\underline{\mathbf{y}}$ linear unabhängig.

ii) Wir benutzen das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren. Es sei

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{\underline{\mathbf{v}}^{(1)}}{\|\underline{\mathbf{v}}^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Außerdem seien

$$\begin{aligned}
\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(2)} &= \underline{\mathbf{v}}^{(2)} - \langle\underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(1)}\rangle\underline{\mathbf{f}}^{(1)}\\
&= \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\underline{\mathbf{f}}^{(2)} = \frac{\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(2)}}{\|\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$.

iii) Um einen zu $\underline{\mathbf{f}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{f}}^{(2)}$ orthogonalen Vektor zu konstruieren, berechnen wir das Vektorprodukt

$$\underline{\mathbf{f}}^{(3)} = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \times \underline{\mathbf{f}}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

($\underline{\mathbf{f}}^{(3)}$ ist bereits normiert, da $\|\underline{\mathbf{f}}^{(1)} \times \underline{\mathbf{f}}^{(2)}\| = \|\underline{\mathbf{f}}^{(1)}\| \|\underline{\mathbf{f}}^{(2)}\| \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ gilt). Wegen

$$\langle \underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)} \rangle = \langle \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)} \rangle = 0$$

(siehe Seite 209 Bemerkung *ii)*) folgt aus Teil *i)*, dass die Vektoren $\underline{\mathbf{f}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{f}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{f}}^{(3)}$ linear unabhängig sind, sodass $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)})$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 12. Es sei $V = \mathrm{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)})$. Zunächst bestimmen wir $\dim V$. Hierzu seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{0}}.$$

Dann folgt aus der zweiten Gleichung $\alpha = -\gamma$. Einsetzen in die vierte Gleichung liefert $\beta = 0$, sodass wegen der dritten Gleichung $\gamma = 0$ und damit $\alpha = 0$. Die drei Vektoren sind also linear unabhängig und damit ist $\dim V = 3$.

Nun konstruieren wir mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis von V. Es sei

$$\underline{\mathbf{w}}^{(1)} = \frac{\underline{\mathbf{v}}^{(1)}}{\|\underline{\mathbf{v}}^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem seien

$$
\begin{aligned}
\underline{\tilde{\mathbf{w}}}^{(2)} &= \underline{\mathbf{v}}^{(2)} - \langle \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{w}}^{(1)} \rangle \underline{\mathbf{w}}^{(1)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und

$$
\underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \frac{\underline{\tilde{\mathbf{w}}}^{(2)}}{\|\underline{\tilde{\mathbf{w}}}^{(2)}\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\underline{\tilde{\mathbf{w}}}^{(3)} &= \underline{\mathbf{v}}^{(3)} - \langle \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{w}}^{(1)} \rangle \underline{\mathbf{w}}^{(1)} - \langle \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)} \rangle \underline{\mathbf{w}}^{(2)} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{18} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und

$$
\underline{\mathbf{w}}^{(3)} = \frac{\underline{\tilde{\mathbf{w}}}^{(3)}}{\|\underline{\tilde{\mathbf{w}}}^{(3)}\|} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Es ist $(\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)}, \underline{\mathbf{w}}^{(3)})$ eine Orthonormalbasis für V. Nun berechnen wir das orthogonale Komplement $V^{\perp}$. Es ist $\underline{\mathbf{x}} \in V^{\perp}$ genau dann wenn $\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}} \rangle = 0$ für alle $\underline{\mathbf{v}} \in V$, d.h.

$$
\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)} \rangle = 0, \quad \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{w}}^{(3)} \rangle = 0,
$$

also

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 && (4)\\
-x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 && (5)\\
-3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &= 0. && (6)
\end{aligned}$$

Aus Gleichung (**??**) folgt $x_2 = 4x_3 + x_4$. Einsetzen in Gleichung (**??**) liefert $-3x_1 + 21x_3 + 6x_4 = 0$, also $x_1 = 7x_3 + 2x_4$. Setzen wir dies wiederum in Gleichung (**??**) ein, so erhalten wir $18x_3 + 6x_4 = 0$, also $x_4 = -3x_3$ und damit $x_1 = x_3$ und $x_2 = x_3$. Ein Vektor $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4$ ist also genau dann Element von $V^\perp$, wenn er von der Form

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ -3x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R},$$

ist.

Setzen wir

$$\underline{\tilde{\mathbf{w}}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{w}}^{(4)} = \frac{\underline{\tilde{\mathbf{w}}}^{(4)}}{\|\underline{\tilde{\mathbf{w}}}^{(4)}\|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

so sind die Vektoren $\underline{\mathbf{w}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{w}}^{(2)}$, $\underline{\mathbf{w}}^{(3)}$ und $\underline{\mathbf{w}}^{(4)}$ nach Aufgabe 2*i*) linear unabhängig und per Konstruktion ist $(\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)}, \underline{\mathbf{w}}^{(3)}, \underline{\mathbf{w}}^{(4)})$ eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 13.

i) Es seien

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

und

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Parameterdarstellung der Ebene E_1 ist

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}} + \alpha \underline{\mathbf{v}} + \beta \underline{\mathbf{w}}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\\
&= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Für die Hessesche Normalform berechnen wir

$$\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \|\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}}\| = \sqrt{26}$$

und setzen

$$\underline{\mathbf{N}} = \pm\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}-1\\-4\\-3\end{pmatrix} = \mp\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}.$$

Die Rechnung

$$\langle\underline{\mathbf{N}},\underline{\mathbf{a}}\rangle = \mp\frac{1}{\sqrt{26}}\left\langle\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \mp\frac{6}{\sqrt{26}}$$

zeigt schließlich, dass die richtige Normierung durch

$$\underline{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$$

gegeben ist und die Hessesche Normalform von E_1 lautet

$$E_1 = \Big\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \langle\underline{\mathbf{N}},\underline{\mathbf{x}}\rangle - \frac{1}{\sqrt{26}} = 0\Big\}.$$

ii) Es sei $\underline{\mathbf{x}} = (x_1,x_2,x_3)^\top \in E_1 \cap E_2$. Wegen $\underline{\mathbf{x}} \in E_2$ gilt $x_3 = 0$ und aus $\underline{\mathbf{x}} \in E_1$ folgt

$$\left\langle\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{26}},$$

also $x_1 + 4x_2 = 1$, d.h. $\underline{\mathbf{x}}$ ist von der Form

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}1-4x_2\\x_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4x_2\\x_2\\0\end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Schnittgerade ist also gegeben durch

$$E_1 \cap E_2 = \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Aufgabe 14.

i) (a) Wegen

$$-\underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \underline{\mathbf{v}}^{(2)} + \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{0}}$$

sind die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$ linear abhängig und bilden somit (wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$) keine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Da die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ linear unabhängig sind, ist $(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$ eine Basis von $\operatorname{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)})$. Zur Bestimmung einer Orthonormalbasis verwenden wir das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren.

Es sei

$$\underline{\mathbf{w}}^{(1)} = \frac{\underline{\mathbf{v}}^{(1)}}{\|\underline{\mathbf{v}}^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem seien

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\mathbf{w}}}^{(2)} &= \underline{\mathbf{v}}^{(2)} - \langle \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{w}}^{(1)} \rangle \underline{\mathbf{w}}^{(1)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \frac{\tilde{\underline{\mathbf{w}}}^{(2)}}{\|\tilde{\underline{\mathbf{w}}}^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $(\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)})$ eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Spann}(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)})$.

ii) Für $\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4$ gilt

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}} \in U^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 + x_3 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = x_3 = 0, \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}
U^{\perp} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 = x_3 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \colon x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \colon x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Spann} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

iii) Der Winkel zwischen $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ beträgt $90°$ genau dann, wenn

$$0 = \langle \underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)} \rangle = 2a^2 + a + \frac{1}{16}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$a = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

iv) Es seien

$$\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Parameterdarstellung der Ebene E, die durch die Punkte $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$ und $\underline{\mathbf{c}}$ verläuft, ist

$$\begin{aligned}
E &= \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}} + \alpha \underline{\mathbf{v}} + \beta \underline{\mathbf{w}}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} \\
&= \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

Für die Hessesche Normalform berechnen wir

$$\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}}\| = \sqrt{2}$$

und setzen

$$\underline{\mathbf{N}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Rechnung

$$\langle \underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{a}} \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \pm\sqrt{2}$$

zeigt schließlich, dass die richtige Normierung durch

$$\underline{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist und die Hessesche Normalform von E lautet

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{x}} \right\rangle - \sqrt{2} = 0 \right\}.$$