Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
Selina Schwindling

Tag 7, Thema 2
Folgen und Mengen im $\mathbb{R}^n$
Blokkurs 2020
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure I

i) Kapitel 10.3 "Folgen im $\mathbb{R}^n$"

ii) Kapitel 10.4 "Eigenschaften von Mengen im $\mathbb{R}^n$"

Übungen

Aufgabe 1.

i) Beweisen Sie Satz 10.3 aus der Vorlesung:

Es seien $\underline{\mathbf{x}}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Die Folge $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent gegen $\underline{\mathbf{x}}$, falls

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

ii) Es sei $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Folge $\{\|\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\|\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge ist. Gilt die Umkehrung?

Aufgabe 2.

i) Es seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie, dass die Mengen $U_1 \cap U_2$ und $U_1 \cup U_2$ offen sind.

ii) Es seien $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass die Mengen $A_1 \cap A_2$ und $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen sind.

iii) Finden Sie abgeschlossene Teilmengen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \mathbb{R}$ offen ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 3.

i) Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Zeigen Sie, dass $U \cup V \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist.

ii) Es seien $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $U \subset A$ offen. Zeigen Sie, dass $A - U$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 4. Welche der folgenden Mengen sind kompakt?

i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy = 0\}$

ii) $B = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}^2 \colon n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{(0, 0)\}$

iii) $C = \left\{\left(\sqrt{n}\cos(n\theta), \sqrt{n}\sin(n\theta)\right) \in \mathbb{R}^2 \colon \theta \in (0, 2\pi], n \in \mathbb{N}\right\}$

Aufgabe 5.

i) Es sei
$$A = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}.$$
Ist A offen? Ist A kompakt?

ii) Es sei
$$B = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 0\}.$$
Ist B offen? Ist B abgeschlossen?

Aufgabe 6. Es seien
$$A = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x_2 \leq x_1\}, \quad B = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$
Sind die Mengen
$$A, \quad B, \quad A \cap B, \quad A \cup B, \quad A - B, \quad \partial A$$
beschränkt/offen/abgeschlossen/kompakt?

Aufgabe 7. Ist die Menge
$$U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$
offen? Ist sie kompakt?

Aufgabe 8. Betrachten Sie die Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$A := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq (x_1^2/4) + x_2^2 \leq 2\} \,, \qquad B := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > x_1\} \,.$$

Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle die richtigen Möglichkeiten an. Begründen Sie Ihre Antworten und fertigen Sie eine Skizze an.

	beschränkt	offen	abgeschlossen	kompakt	„nichts“
A					
B					
$A \cap B$					
$A \cup B$					
$B - A$					
∂A					

Bemerkung. Der Eintrag „nichts“ bedeutet, dass die Menge weder beschränkt noch offen noch abgeschlossen noch kompakt ist; es können durchaus verschiedene Eigenschaften gleichzeitig zutreffen.